GERALDO ÁVILA

3,14159265358979323846264338327950288419716939937510

ANÁLISE MATEMÁTICA

PARA LICENCIATURA

3ª edição revista e ampliada

EDITORA EDGARD BLÜCHER

© 2001 *Geraldo Severo de Souza Ávila*

1ª edição - 2001

É proibida a reprodução total ou parcial
por quaisquer meios
sem autorização escrita da editora

EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA.
Rua Pedroso Alvarenga, 1245 - cj. 22
04531-012 – São Paulo, SP – Brasil
Fax: (0xx11)3079-2707
e-mail: eblucher@uol.com.br

Impresso no Brasil *Printed in Brazil*

ISBN 85-212-0295-4

CÓPIA NÃO AUTORIZADA É CRIME
ABDR
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE DIREITOS REPROGRÁFICOS
RESPEITE O DIREITO AUTORAL
EDITORA AFILIADA

PREFÁCIO

O presente livro foi escrito especialmente para alunos de licenciatura em Matemática, por isso mesmo difere dos livros de Análise direcionados aos cursos de bacharelado. Difere no conteúdo, por não incluir tópicos mais especializados, como a continuidade uniforme, a teoria da integral e a eqüicontinuidade, de interesse maior no bacharelado e secundário na licenciatura; mas difere também por incluir, no capítulo 1, uma apresentação de certos tópicos sobre os números reais, relevantes nos cursos de licenciatura. Uma terceira diferença está na maneira de apresentação dos vários assuntos, com atenção maior ao desenvolvimento das idéias e aspectos históricos da disciplina.

O texto não inclui um tratamento de derivadas e integrais, mas pressupõe que o leitor já tenha feito um primeiro curso de Cálculo, onde esses tópicos são tratados. É preciso que o leitor tenha um bom conhecimento de derivadas, integrais e suas técnicas. Por isso mesmo, nos momentos oportunos do desenrolar do curso, o professor deve levar seus alunos a uma revisão sistemática desses tópicos do Cálculo; ou mesmo, dedicar várias semanas iniciais a essa revisão.

Num primeiro curso de Cálculo, as apresentações costumam ser feitas de maneira intuitiva e informal, com pouca ou nenhuma demonstração rigorosa. Esse procedimento é seguido, em parte por razões didáticas; mas também por razões ligadas à própria natureza dos tópicos tratados, cujo desenvolvimento histórico ocorreu primeiro de maneira intuitiva e informal, desde o século XVII até aproximadamente 1820. A partir de então, os avanços da teoria exigiam conceituações precisas das idéias de função, continuidade, derivada, convergência, integral, etc. É precisamente uma apresentação logicamente bem organizada de todos esses tópicos do Cálculo que constitui um primeiro curso de Análise.

Por essas razões, um dos objetivos principais de um curso de Análise é a prática em demonstrações. Enunciar e demonstrar teoremas é uma das ocupações centrais de todo professor ou estudioso da Matemática, não sendo admissível que alguém que pretenda ensinar Matemática sinta-se deficiente nesse mister. Daí uma das principais razões de uma disciplina de Análise nos cursos de licenciatura.

Mas, aliada a essa tarefa de praticar a arte de enunciar e demonstrar teoremas, o aluno de licenciatura tem, na disciplina de Análise, a oportunidade de se familiarizar com uma das partes mais importantes da Matemática que se vem desenvolvendo desde o início do século XIX. E para facilitar a compreensão desse desenvolvimento, e dar ao leitor uma visão mais abrangente e enriquecedora de toda a Matemática, o presente texto incorpora várias notas históricas e complementares ao final de cada capítulo, como já fizemos em outros livros de nossa autoria.

Conversa com o aluno

Ninguém aprende Matemática ouvindo o professor em sala de aula, por mais organizadas e claras que sejam suas preleções, por mais que se entenda tudo o que ele explica. Isso ajuda muito, mas é preciso estudar por conta própria logo após as aulas, antes que o benefício delas desapareça com o tempo. Portanto, você, leitor, não vai aprender Matemática porque assiste aulas, mas por que estuda. E esse estudo exige muita disciplina e concentração: estuda-se sentado à mesa, com lápis e papel à mão, prontos para serem usados a todo momento. Você tem de interromper a leitura com freqüência, para ensaiar a sua parte: fazer um gráfico ou diagrama, escrever alguma coisa ou simplesmente rabiscar uma figura que ajude a seguir o raciocínio do livro, sugerir ou testar uma idéia; escrever uma fórmula, resolver uma equação ou fazer um cálculo que verifique se alguma afirmação do livro está mesmo correta. Por isso mesmo, não espere que o livro seja completo, sem lacunas a serem preenchidas pelo leitor; do contrário, esse leitor será induzido a uma situação passiva, quando o mais importante é desenvolver as habilidades para o trabalho independente, despertando a capacidade de iniciativa individual e a criatividade. Você estará fazendo progresso realmente significativo quando sentir que está conseguindo aprender sozinho, sem ajuda do professor; quando sentir que está realmente "aprendendo a aprender".

Os exercícios são uma das partes mais importantes do livro. De nada adianta estudar a teoria sem aplicar-se na resolução dos exercícios propostos. Muitos desses exercícios são complementos da teoria e não podem ser negligenciados, sob pena de grande prejuízo no aprendizado. Como em outros livros de nossa autoria, as listas de exercícios são sempre seguidas de respostas, sugestões e soluções. Mas o leitor precisa saber usar esses recursos com proveito, só consultando-as após razoável esforço próprio. E não espere que uma sugestão ou solução seja completa, às vezes é apenas uma dica para dar início ao trabalho independente do leitor.

Ficaremos muito agradecidos a todos os leitores que se dignarem escrever-nos, apontando falhas no texto ou fazendo sugestões que possam melhorá-lo em edições futuras. Para isso podem utilizar o endereço da própria Editora.

Por fim, deixamos aqui consignados nossos agradecimentos ao nosso Editor, Dr. Edgard Blücher, pelo continuado interesse e apoio ao nosso trabalho.

Geraldo Ávila
Brasília, maio de 2001

Conteúdo

CAPÍTULO 0: PRELIMINARES DE LÓGICA, 1

Proposições e teoremas, 1. Condição necessária e suficiente, 2. Dois princípios de Lógica, 3. Contraposição, 3. Uma aplicação, 4. Demonstração por absurdo, 4.

CAPÍTULO 1: NÚMEROS REAIS 6

Números racionais e representação decimal, 6. Números irracionais, 7. $\sqrt{2}$ é número irracional, 8. Números reais, 8. Exercícios, 9. Respostas, sugestões e soluções, 10. Noções sobre conjuntos, 11. Especificação de conjuntos, 11. Propriedades gerais, 12. Exercícios, 13. Sugestões e soluções, 14. Conjuntos finitos e infinitos, 14. Conjuntos enumeráveis, 15. A enumerabilidade do conjunto **Q**, 15. Números irracionais, 16. A não enumerabilidade do conjunto **R**, 16. Exercícios, 18. Respostas, sugestões e soluções, 18. Grandezas incomensuráveis, 19. A medição de segmentos, 19. Segmentos incomensuráveis, 20. O retângulo áureo, 22. Uma infinidade de retângulos áureos, 23. Divisão áurea, 23. Exercícios, 24. Sugestões, 24. A crise dos incomensuráveis e sua solução, 25. A teoria das proporções, 25. Desenvolvimento posterior da Matemática, 26. Exercícios, 27. Sugestões e soluções, 28. Dedekind e os números reais, 29. Cortes de Dedekind, 29. A relação de ordem, 30. Operações com números reais, 31. O teorema de Dedekind, 32. Supremo e ínfimo de um conjunto, 33. Exercícios, 35. Sugestões e soluções, 36. Desigualdade do triângulo, 38. Exercícios, 39. Sugestões e soluções, 39. Notas históricas e complementares, 39. Os Elementos de Euclides, 39. O conteúdo dos Elementos, 40. A Geometria dedutiva, 41. As geometrias não-euclidianas, 41. Os Fundamentos da Matemática, 43. Definição de corpo, 44.

CAPÍTULO 2: SEQÜÊNCIAS INFINITAS 45

Intervalos, 45. Seqüências infinitas, 45. Conceito de limite e primeiras propriedades, 47. Definição de vizinhança, 48. Seqüências limitadas, 51. Operações com limites, 52. Exercícios, 54. Sugestões e soluções, 55. Seqüências monótonas, 56. O número e, 57. Subseqüências, 58. Limites infinitos, 59. Seqüências recorrentes, 61. Exercícios, 62. Sugestões e soluções, 64. Intervalos encaixados, 65. Pontos aderentes e teorema de Bolzano-Weierstrass, 66. Critério de convergência de Cauchy, 67. Exercícios, 69. Sugestões e soluções, 70. Notas históricas e complementares, 71. A não enumerabilidade dos números reais, 71. Cantor e os números reais, 71. Bolzano e o teorema de Bolzano-Weierstrass, 73.

CAPÍTULO 3: SÉRIES INFINITAS 75

Primeiros exemplos, 75. O conceito de soma infinita, 76. Propriedades e exemplos, 77. Série de termos positivos, 80. Exercícios, 81. Respostas, sugestões e soluções, 81. Teste de comparação, 82. Irracionalidade do número e, 83. Exercícios, 86. Sugestões, 87. Teste da razão, 87. Exercícios, 88. Sugestões, 89. O teste da integral, 89. Exercícios, 90. Sugestões, 90. Convergência absoluta e condicional, 91. Séries alternadas e convergência condicional, 92. Exercícios, 94. Notas históricas e complementares, 94. A origem das séries infinitas, 94. A divergência da série harmônica, 95. Nicole Oresme e a série de Swineshead, 96. Cauchy e as séries infinitas, 97.

CAPÍTULO 4: FUNÇÕES, LIMITE E CONTINUIDADE 99

O conceito de função, 99. Terminologia e notação, 100. Vários tipos de função, 102. Exercícios, 103. Sugestões e soluções, 104. Limite e continuidade, primeiras definições, 105. As definições de limite e continuidade, 106. Propriedades do limite, 107. Exercícios, 111. Sugestões e soluções, 112. Limites laterais e funções monótonas, 113. Limites infinitos e limites no infinito, 114. As descontinuidades de uma função, 117. Exercícios, 120. Sugestões e soluções, 121. O teorema do valor intermediário, 122. Exercícios, 124. Sugestões, 125. Notas históricas e complementares, 125. O início do rigor na Análise Matemática, 125. O teorema do valor intermediário, 128. Weierstrass e os fundamentos da Análise, 129. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), 129.

CAPÍTULO 5: SEQÜÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES 131

Introdução, 131. Seqüências de funções, 132. Convergência simples e convergência uniforme, 132. Exercícios, 135. Sugestões e soluções, 136. Conseqüências da convergência uniforme, 137. Séries de funções, 139. Exercícios, 141. Sugestões e soluções, 142. Séries de potências, 143. Raio de convergência, 144. Propriedades das séries de potências, 145. Exercícios, 147. Sugestões, 148. As funções trigonométricas, 148. Exercícios, 150. Sugestões, 150. Notas históricas e complementares, 150. As séries de potências, 150. Lagrange e as funções analíticas, 151. A convergência uniforme, 152. A aritmetização da Análise, 152.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA 153

Capítulo 0

PRELIMINARES DE LÓGICA[1]

As noções elementares de Lógica que exporemos a seguir são importantes na linguagem matemática, particularmente em Análise. Mas não pense o leitor que seja preciso fazer um curso de Lógica para estudar Matemática. Isso não é, em absoluto, necessário, nem mesmo para quem faz mestrado ou doutorado. Em verdade, as noções de Lógica dadas aqui costumam ser aprendidas naturalmente, durante o próprio estudo da Matemática.

Lógica e Fundamentos da Matemática são disciplinas muito especializadas, que formam um campo de estudos de grande importância em Matemática e Epistemologia[2]. Mas, no estudo de outras disciplinas matemáticas — Análise, em particular — bastam os poucos rudimentos que daremos neste capítulo.

Proposições e teoremas

Proposição significa qualquer afirmação, verdadeira ou falsa, mas que faça sentido. Por exemplo, são proposições as três afirmações seguintes:

A) Todo número primo maior do que 2 é ímpar.

B) A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°.

C) Todo número ímpar é primo.

Observe que dessas três proposições, as duas primeiras são verdadeiras, mas a terceira é falsa, pois 9, 15, 21, etc., são números ímpares que não são primos.

Um *teorema* é uma proposição verdadeira do tipo "P implica Q", onde P e Q também são proposições. Escreve-se, simbolicamente, "$P \Rightarrow Q$", que tanto se lê "P implica Q", como "P acarreta Q", ou "Q é conseqüência de P". P é a *hipótese* e Q é a *tese* do teorema. Por exemplo, a proposição A acima é um teorema, que pode ser escrito na forma $D \Rightarrow E$, onde D e E são as proposições:

D) n é um número primo maior do que 2.

---

[1] Veja também o artigo de Gilda Palis e Iaci Malta, na RPM 37. Para o leitor que ainda não sabe, RPM significa *Revista do Professor de Matemática*, uma publicação da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática). Essa revista pode ser assinada, e seus números atrasados adquiridos, escrevendo para a Caixa Postal 66281, CEP 05428-999 São Paulo, SP.

[2] Veja, no final do capítulo 1, as notas sobre Fundamentos.

E) n é um número ímpar.

Outro exemplo de teorema:

Se duas frações a/b e c/d são iguais, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Esse mesmo teorema pode também ser escrito assim:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Chama-se *Lema* a um teorema preparatório para a demonstração de outro teorema. *Corolário* é um teorema que segue como conseqüência natural de outro.

Muitos autores utilizam a palavra "proposição" para designar os teoremas de uma certa teoria, reservando a palavra "teorema" para aqueles resultados que devem ser ressaltados como os mais importantes.

Condição necessária e suficiente

Num teorema "$P \Rightarrow Q$", diz-se que a hipótese P é uma *condição suficiente* de Q (suficiente para a validade de Q), ou que a tese Q é *condição necessária* de P. Assim, com referência às proposições atrás, D é condição suficiente para que E seja verdadeira, e E é condição necessária de D; quer dizer, valendo D, tem de valer E, ou seja, é necessário valer E.

A *recíproca* de um teorema $P \Rightarrow Q$ é a proposição $Q \Rightarrow P$, que também se escreve $P \Leftarrow Q$. A recíproca de um teorema pode ou não ser verdadeira. Por exemplo, a recíproca do teorema "todo número primo maior do que 2 é ímpar" é "todo número ímpar é primo maior do que 2". Isto é falso, pois nem todo número ímpar é primo. Como exemplo de teorema cuja recíproca é verdadeira considere o teorema de Pitágoras:

Se ABC é um triângulo retângulo em B, então $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Sua recíproca também é verdadeira, e assim se enuncia:

Se ABC é um triângulo, com $AC^2 = AB^2 + BC^2$, *então ABC é retângulo em B.*

Quando a recíproca de um teorema é verdadeira, escrevemos o teorema, juntamente com sua recíproca, na forma $P \Leftrightarrow Q$. Neste caso, qualquer uma das proposições P e Q é ao mesmo tempo necessária e suficiente para a validade da outra.

Observe que $P \Rightarrow Q$ é o mesmo que "vale Q se valer P"; ou ainda, "vale P somente se valer Q". Por isso é costume enunciar um teorema com sua recíproca, $P \Leftrightarrow Q$, dizendo "P se e somente se Q". $P \Rightarrow Q$ é a parte "P somente se Q", e $Q \Rightarrow P$ é a parte "vale P se valer Q", proposição esta que também costuma ser

escrita mais abreviadamente na forma "P se Q". Note ainda que a proposição $P \Leftrightarrow Q$ significa que P e Q são proposições equivalentes.

No caso do teorema de Pitágoras, podemos juntar o teorema e sua recíproca num só enunciado, das diversas maneiras seguintes:

A condição necessária e suficiente para que um triângulo ABC seja retângulo em B é que $AC^2 = AB^2 + BC^2$;

Seja ABC um triângulo. Então, ABC é retângulo em $B \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$;

Um triângulo ABC é retângulo em B se e somente se $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Dois princípios de Lógica

A negação de uma proposição A será denotada por $\tilde{A}$. Por exemplo, a negação da proposição "todo número primo é ímpar" tanto pode ser "nem todo número primo é ímpar", ou "existe um número primo que não é ímpar", ou ainda "existe um número primo par".

Estas duas últimas formas são preferíveis à primeira por serem afirmativas. A negação da proposição "todo homem é mortal" é "nem todo homem é mortal"; mas, em forma afirmativa, deve ser "existe um homem imortal". Como veremos, oportunamente, em nosso estudo de Análise, nem sempre é fácil construir a negação de uma proposição. (Veja, por exemplo, o Exerc. 18 da p. 55.)

O *princípio da não contradição* afirma que uma proposição não pode ser verdadeira juntamente com sua negação. Em outras palavras, se uma proposição A for verdadeira, sua negação $\tilde{A}$ não pode ser verdadeira.

O chamado *princípio do terceiro excluído* afirma que qualquer proposição A é verdadeira ou falsa. Em outras palavras, ou A é verdadeira, ou $\tilde{A}$ é verdadeira, não sendo possível uma terceira alternativa.

Contraposição

Observe que um teorema "$A \Rightarrow B$" não é equivalente nem implica "$\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B}$". Por exemplo, o teorema "Se x é um número real, então $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$" é verdadeiro, mas não implica nem é equivalente a "$x \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 0$".

Todavia, é verdade (como provaremos logo a seguir) que "$A \Rightarrow B$" é equivalente a "$\tilde{B} \Rightarrow \tilde{A}$". Esta última proposição é chamada a *contraposição* ou *proposição contraposta* à proposição "$A \Rightarrow B$".

Teorema. *Sejam A e B duas proposições, Então, $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\tilde{B} \Rightarrow \tilde{A})$.*

Demonstração. Faremos primeiro a demonstração no sentido $\Rightarrow$. Para isso, nossa hipótese é que $A \Rightarrow B$, isto é, que "se A for verdadeira, B também é"; queremos provar que "se $\tilde{B}$ for verdadeira, $\tilde{A}$ também é". Então, começamos

supondo $\tilde{B}$ verdadeira. Ora, se $\tilde{A}$ não fosse verdadeira, pelo princípio do terceiro excluído, A seria verdadeira; e pela hipótese do teorema $(A \Rightarrow B)$, B seria verdadeira. Mas, pelo princípio da não contradição, não podemos aceitar isto (visto que estamos supondo $\tilde{B}$ verdadeira). Então, não podemos também aceitar que $\tilde{A}$ não seja verdadeira, donde, $\tilde{A}$ é verdadeira, o que conclui a demonstração desejada de que $\tilde{B} \Rightarrow \tilde{A}$.

Finalmente, temos de provar a recíproca, isto é, a implicação $\Leftarrow$, vale dizer, $(\tilde{B} \Rightarrow \tilde{A}) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$. Mas isto decorre do que acabamos de provar. De fato, trocando A por $\tilde{B}$ e B por $\tilde{A}$ em $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\tilde{B} \Rightarrow \tilde{A})$ obtemos exatamente $(\tilde{B} \Rightarrow \tilde{A}) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

Uma aplicação

A contraposição é freqüêntemente usada em demonstrações. Vamos dar um exemplo disso, primeiro provando, por demonstração direta, que "o quadrado de um número par também é par". De fato, número par é todo número n da forma $n = 2k$, onde k é um inteiro. Então, $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, que é da forma $2k'$, onde k' é o inteiro $2k^2$. Isto completa a demonstração do teorema.

Consideremos agora o teorema: "se o quadrado de um inteiro n for ímpar, então n também será ímpar". Podemos provar este teorema diretamente, mas isto é desnecessário; basta observar que ele é o contraposto do teorema anterior, já que as proposições "n é par" e "n é ímpar" são a negação uma da outra.

Demonstração por absurdo

As chamadas *demonstrações por redução ao absurdo*, ou simplesmente *demonstrações por absurdo*, seguem um roteiro parecido com o das demonstrações por contraposição. Para provar que $A \Rightarrow B$ começamos supondo A verdadeira e B falsa (esta última é a chamada "hipótese do raciocínio por absurdo", uma suposição apenas temporária, até chegarmos a uma contradição, um absurdo. Somos então forçados a remover a hipótese do raciocínio por absurdo e concluir que B é verdadeira).

Como aplicação, vamos demonstrar o teorema mencionado atrás, de que *Num plano, por um ponto fora de uma reta não se pode traçar mais que uma perpendicular à reta dada.* Vimos que esse teorema se escreve na forma $A \Rightarrow B$, onde A e B são as proposições:

A: Num plano é dada uma reta r e um ponto $P \notin r$.

B: No plano dado não existe mais que uma reta s perpendicular a r, tal que $P \in s$.

A negação de B é que existe mais que uma perpendicular; ora, para afirmar

isto, basta supor que existam duas, assim:

$\tilde{B}$: No plano dado existem duas retas distintas, s e t, perpendiculares a r, tais que $P \in s$ e $P \in t$.

Vamos provar que essa proposição nos leva a um absurdo. Com efeito, sejam S e T os pontos de interseção de s e t com a reta r (faça a figura), sendo que esses pontos são distintos, ou s e t não seriam distintas. Ora, os ângulos em S e T são todos retos; mas isto é absurdo, senão a soma dos ângulos do triângulo PST seria maior do que 180°. Concluímos, pois, que a proposição B é verdadeira.

Capítulo 1

NÚMEROS REAIS

Como o primeiro alicerce de um curso de Análise é o conjunto dos números reais, é conveniente iniciarmos nosso estudo com a consideração de algumas questões sobre esses números. Portanto, neste capítulo recordaremos inicialmente certas propriedades dos números reais; e, a partir da p. 19, começando com o conceito de "grandezas incomensuráveis", explicaremos como Richard Dedekind fez uma construção rigorosa dos números reais, pressupondo os racionais.

Números racionais e representação decimal

Como de costume, denotaremos com $\mathbf{N}$ o conjunto dos números naturais (inteiros positivos)[1], com $\mathbf{Z}$ o conjunto dos inteiros (positivos, negativos e o zero), com $\mathbf{Q}$ o conjunto dos números racionais e com $\mathbf{R}$ o dos números reais.

Como o leitor bem sabe, os números racionais costumam ser representados por frações ordinárias, representação essa que é única se tomarmos as frações em forma irredutível e com denominadores positivos.

Vamos considerar a conversão de frações ordinárias em decimais, com vistas a entender quando a decimal resulta ser finita ou periódica.

Como sabemos, a conversão de uma fração ordinária em decimal se faz dividindo-se o numerador pelo denominador. Se o denominador da fração em forma irredutível só contiver os fatores primos de 10 (2 e/ou 5), a decimal resultante será sempre finita; e é assim porque podemos introduzir fatores 2 e 5 no denominador em número suficiente para fazer esse denominador uma potência de 10. Exemplos:

$$\frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{2 \times 5} = \frac{6}{10} = 0,6;$$

$$\frac{41}{20} = \frac{41}{2^2 \times 5} = \frac{41 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{205}{100} = 2,05;$$

[1] Esses números chamam-se "naturais" justamente por surgirem "naturalmente" em nossa experiência com o mundo físico, já nos primeiros anos da infância. Deste ponto de vista, "zero" está longe de ser um número natural. Aliás, levou muito tempo para os matemáticos concederem ao zero o *status* de número. No entanto, é freqüente o aluno perguntar: "Professor, zero é número natural?" Isto ocorre porque certos autores incluem o zero entre os naturais. Nada de errado nisso, é apenas uma convenção, que os algebristas principalmente preferem fazer, por ser conveniente em seu trabalho. Coisa parecida acontece com a exclusão do número 1 como número primo, simplesmente porque isso é conveniente em teoria dos números.

$$\frac{63}{40} = \frac{63}{2^3 \times 5} = \frac{63 \times 5^2}{2^3 \times 5^3} = 1,575.$$

Vemos, por esses exemplos, que *uma fração ordinária em forma irredutível*[2] *se transforma em decimal finita se seu denominador não contém outros fatores primos além de* 2 *e* 5.

O que acontece se o denominador de uma fração irredutível contiver algum fator primo diferente de 2 e 5? Consideremos o exemplo da conversão de 5/7 em decimal, ilustrada abaixo. Na primeira divisão (de 50 por 7), obtemos o resto 1; depois, nas divisões seguintes, vamos obtendo, sucessivamente, os restos 3, 2, 6, 4 e 5. No momento em que obtemos o resto 5, que já ocorreu antes, sabemos que os algarismos do quociente voltarão a se repetir, resultando no período 714285. Essa repetição acontecerá certamente, pois os possíveis restos de qualquer divisão por 7 são 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Vemos também que o período terá no máximo seis algarismos.

```
5,00000000 |7
  10       0, 714285 71...
   30
    20
     60
      40
       50
        10
```

Este último exemplo e os anteriores nos permitem concluir que *toda fração irredutível p/q, quando convertida à forma decimal, resulta numa decimal finita ou periódica, ocorrendo este último caso se o denominador q contiver algum fator primo diferente de 2 e 5.*

Números irracionais

Podemos conceber números cuja representação decimal não é nem finita nem periódica. Esses são os chamados *números irracionais.* Mais adiante falaremos sobre a construção rigorosa desses números. Por enquanto vamos apenas admitir a existência deles e examinar algumas conseqüências interessantes.

É fácil produzir números irracionais; basta inventar uma regra de formação que não permita aparecer período. Exemplos:

$$0,20\,200\,2000\,20000\ldots; \quad 0,35\,355\,3555\,35555\ldots;$$

[2]Observe que a fração tem de ser considerada na sua forma irredutível. Por exemplo, 63/40 pode ser escrita na forma redutível 189/120, e agora o denominador contém o fator primo 3.

$$0,17\,1177\,111777\,11117777\ldots$$

Um exemplo importante de número irracional é o conhecido número π, dado aqui com suas primeiras 30 casas decimais:

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327 9\ldots$$

O fato de não vermos período nas aproximações de π, por mais que aumentemos essas aproximações, não prova que π seja irracional, pois é concebível que o período tenha milhões, bilhões, trilhões de algarismos — ou mais! Sabemos que π é irracional porque isto pode ser *demonstrado* rigorosamente, assim como se demonstra que a soma dos ângulos de qualquer triângulos é 180°.

$\sqrt{2}$ é número irracional

Parece que o primeiro número irracional a ser descoberto foi $\sqrt{2}$. Em geral, é difícil saber se um dado número é irracional ou não, como é o caso do número π, cuja demonstração de irracionalidade não é simples. Bem mais fácil é demonstrar que o número $\sqrt{2}$ é irracional. Vamos fazer essa demonstração raciocinando por absurdo. Se $\sqrt{2}$ fosse racional, haveria dois inteiros positivos p e q, tais que $\sqrt{2} = p/q$, sendo p/q uma fração irredutível, isto é, p e q primos entre si, ou seja, eles não têm divisor comum maior do que 1. Elevando essa igualdade ao quadrado, obtemos $2 = p^2/q^2$, donde

$$p^2 = 2q^2. \tag{1.1}$$

Isso mostra que p^2 é par, donde concluímos que p também é par (se p fosse ímpar, p^2 seria ímpar), digamos $p = 2r$, com r inteiro. Substituindo na Eq. (1.1), obtemos:

$$4r^2 = 2q^2, \quad \text{ou} \quad q^2 = 2r^2.$$

Daqui concluímos, como no caso de p, que o número q também deve ser par. Isto é absurdo, pois então p e q são ambos divisíveis por 2 e p/q não é fração irredutível. O absurdo a que chegamos é conseqüência da hipótese que fizemos no início, de que $\sqrt{2}$ fosse racional. Somos, assim, forçados a afastar essa hipótese e concluir que $\sqrt{2}$ é irracional.

1.1. Observação. A demonstração que acabamos de fazer é, na verdade, apenas a demonstração de que não existe número racional cujo quadrado seja 2. Afirmar que $\sqrt{2}$ é um número irracional só é possível no pressuposto de que já estejamos de posse dos números irracionais, mas isto requer a construção lógica desses números. Vamos nos ocupar deste problema a partir da p. 29.

Números reais

Número real é todo número que é racional ou irracional. Observe que os números

naturais e os números inteiros são casos particulares de números racionais, de forma que quando dizemos que um número é racional, fica aberta a possibilidade de ele ser um número inteiro (positivo ou negativo) ou simplesmente um número natural.

A totalidade dos números racionais, juntamente com os irracionais é o chamado conjunto dos *números reais*.

Exercícios

1. Prove que a dízima periódica $0,232323\ldots$ é igual a $23/99$.

Reduza à forma de fração ordinária as dízimas periódicas dos Exercs. 2 a 10.

2. $0,777\ldots$
3. $1,666\ldots$
4. $0,170\,170\ldots$
5. $1,27\,27\ldots$
6. $0,343\,343\ldots$
7. $0,270\,270\ldots$
8. $21,45\,45\ldots$
9. $3,02\,02\ldots$
10. $5,21\,21\ldots$

11. Estabeleça a seguinte regra: *toda dízima periódica simples* ("simples" quer dizer que o período começa logo após a vírgula) *é igual a uma fração ordinária, cujo numerador é igual a um período e cujo denominador é constituído de tantos 9 quantos são os algarismos do período.*

12. Prove que a dízima periódica $0,21\,507\,507\ldots$ é igual a

$$\frac{21507-21}{99900}=\frac{21486}{9990}=\frac{3581}{1665}.$$

Reduza à forma de fração ordinária os números decimais dos Exercs. 13 a 16.

13. $0,3\,77\ldots$
14. $0,2\,05\,05\ldots$
15. $3,2\,66\ldots$
16. $0,0002727\ldots$

17. Prove que $\sqrt{3}$ é irracional.
18. Prove que $\sqrt{p}$ é irracional. onde $p>1$ é um número primo qualquer.
19. Prove que, se p e q forem números primos distintos, então $\sqrt{pq}$ é irracional.
20. Prove que, se $p_1,\ldots,\ p_r$ forem números primos distintos, então $\sqrt{p_1\ldots p_r}$ é irracional.
21. Se a e b são números irracionais, é verdade que $(a+b)/2$ é irracional? Prove a veracidade dessa afirmação ou dê um contra-exemplo, mostrando que ela é falsa.
22. Prove que a soma ou a diferença entre um número racional e um número irracional é um número irracional. Mostre, com um contra-exemplo, que o produto de dois números irracionais pode ser racional.
23. Prove que o produto de um número irracional por um número racional diferente de zero é um número irracional.
24. Prove que se r for um número irracional então $1/r$ também o será.
25. Prove que se x e y forem números irracionais tais que x^2-y^2 seja racional não-nulo, então $x+y$ e $x-y$ serão ambos irracionais. Exemplo: $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.
26. Prove que, se $p_1,\ldots,\ p_r$ forem números primos distintos, então $\sqrt{p_1^{s_1}\ldots p_r^{s_r}}$ é irracional se algum dos expoentes $s_1\ldots,\ s_r$ for ímpar.

27. Prove que um número N é quadrado perfeito se e somente se todos os fatores primos de N comparecem em N com expoentes pares.

28. Prove que um número que não seja quadrado perfeito, tampouco terá raiz quadrada racional.

Respostas, sugestões e soluções

1. Seja $x = 0,232323\ldots$ Então,

$$100x = 23,2323\ldots, \text{ donde } 100x = 23 + x, \text{ donde } 99x = 23, \text{ donde } x = 23/99.$$

3. $1 + 6/9 = 5/3$.

9. $3 + 2/99$.

11. Seja $x = 0, a_1a_2\ldots a_r\, a_1a_2\ldots a_r\ldots$ uma dízima periódica simples, cujo período possui os r algarismos $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Multiplicando ambos os membros da igualdade por 10^r, obtemos:

$$10^r x = a_1a_2\ldots a_r + x \text{ donde } (10^r - 1)x = a_1a_2\ldots a_r, \text{ donde } x = \frac{a_1a_2\ldots a_r}{10^r - 1}.$$

Isso estabelece a regra formulada, pois $10^r - 1$ é um número formado de r algarismos 9:

$$\text{se } r = 3,\ 10^r - 1 = 999; \text{se } r = 4,\ 10^r - 1 = 9999 \text{ etc.}$$

12. $x = 0,21\,507\,507\ldots$ donde $100x = 21 + 0,507\,507\ldots$, donde

$$100x = 21 + \frac{507}{999} = \frac{21 \times 999 + 507}{999} = \frac{21(1000 - 1) + 507}{999} = \frac{21507 - 21}{999},$$

$$\text{donde } x = \frac{21507 - 21}{99900} = \frac{21486}{99900}.$$

Dividindo numerador e denominador por 6, obtemos, finalmente, $x = \dfrac{3581}{16650}$.

15. Seja $x = 3,266\ldots$ Então, $10x = 32 + 2/3 = 98/3$, donde $x = 98/30 = 49/15$.

18. A resolução deste exercício e do exercício anterior utiliza o mesmo raciocínio do texto no caso de $\sqrt{2}$. Se $\sqrt{p}$ fosse racional, teríamos $\sqrt{p} = m/n$, com m e n primos entre si. Então, $p = m^2/n^2$, donde $m^2 = pn^2$. Isso mostra que m^2 é divisível por p; logo, m também é divisível por p, ou seja, $m = rp$, com r inteiro. Daqui e de $m^2 = pn^2$ segue-se que $r^2p^2 = pn^2$, donde $n^2 = pr^2$, significando que n também é divisível por p. Mas isto é absurdo, senão m e n seriam ambos divisíveis por p e m/n não seria fração irredutível. O absurdo a que chegamos é conseqüência da hipótese inicial de que $\sqrt{p}$ fosse racional. Somos assim forçados a afastar esta hipótese e concluir que $\sqrt{p}$ é irracional.

21. Afirmação falsa. Basta tomar $a = 10 + \sqrt{2}$ e $b = -\sqrt{2}$, que são números irracionais. No entanto, $(a + b)/2 = 5$, que é racional.

22. Sejam a um número racional e α um número irracional. Se $x = a + \alpha$ fosse racional, então $\alpha = x - a$ seria racional (por ser a diferença de dois racionais), o que é absurdo. Assim, concluímos que $a + \alpha$ é irracional. Prove, do mesmo modo, que $a - \alpha$ e $\alpha - a$ são irracionais.

23. Sejam α irracional e $a \neq 0$ racional. Se $x = a\alpha$ fosse racional, o mesmo seria verdade de $\alpha = x/a$, o que é absurdo.

25. Lembramos que $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$. Se um dos fatores, digamos, $x+y$, fosse racional, então $x-y$ também o seria, pois $x - y = (x^2 - y^2)/(x+y)$. Então, x e y também seriam racionais, pois

$$x = \frac{(x+y)+(x-y)}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{(x+y)-(x-y)}{2}.$$

O leitor deve repetir o raciocínio supondo $x - y$ racional.

26. *Sugestão:* Suponha que os expoentes $s_1, \ldots s_l$ sejam ímpares e os demais são pares. Pelo exercício anterior, $\sqrt{p_1 \ldots p_l}$ é irracional.

Noções sobre conjuntos

Coletamos aqui as noções básicas de conjuntos que serão utilizadas em nosso estudo. Várias delas, certamente, já são do conhecimento do leitor. Todos os conjuntos sob consideração serão conjuntos de números reais, isto é, *subconjuntos* de **R**.

A notação "$x \in A$" significa que x é um elemento de A e se lê "x *pertence* a A". A negação disto é "$x \notin A$. Quando todo elemento de A é também elemento de B, dizemos que A é um *subconjunto* de B, ou que "A está incluso em B", e a notação é "$A \subset B$". Observe que podemos ter simultaneamente $A \subset B$ e $B \subset A$, isto significando igualdade de conjuntos, que se escreve "A=B". Diz-se que A é um *subconjunto próprio* de B se $A \subset B$, porém $A \neq B$, isto é, existe algum elemento de B que não está em A.

Dados dois conjuntos A e B, define-se a *união* $A \cup B$ como o conjunto de todos os elementos que estão em pelo menos um dos conjuntos A e B, como ilustra o diagrama da Fig. 1.1a; a *interseção* $A \cap B$ é definida como o conjunto de todos os elementos que estão em A e em B simultaneamente (Fig. 1.1b).

Pode acontecer que A e B não tenham elementos comuns, em cujo caso $A \cap B$ não teria significado. Exceções como essa são evitadas com a introdução do *conjunto vazio*, indicado com o símbolo ϕ; ele é o conjunto que não tem elemento algum.

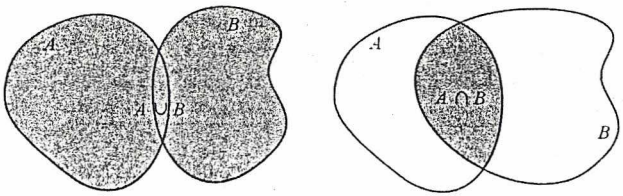
Especificação de conjuntos

Um conjunto pode ser definido pela simples listagem de seus elementos entre chaves ou pela especificação de uma propriedade que caracterize seus elementos. Assim,

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

é o conjunto dos quatro números ímpares de 1 a 7;

$$\mathbf{Z} = \{0, +1, +2, +3, \ldots\}$$



(a) (b)

Fig. 1.1

é o conjunto dos números inteiros;

$$A = \{x \in \mathbf{R}\colon x^2 - 4x + 3 > 0\}$$

é o conjunto dos números reais onde o trinômio $x^2 - 4x + 3 > 0$ é positivo, que é o mesmo que o conjunto dos números que jazem fora do intervalo das raízes, ou seja,

$$A = \{x \in \mathbf{R};\ x < 1\} \cup \{x \in \mathbf{R};\ x > 3\}.$$

Freqüêntemente, um conjunto pode ser descrito de diferentes maneiras. Por exemplo, o conjunto dos números ímpares positivos pode ser descrito como

$$\{1, 3, 5, 7, \ldots\},\ \text{ou}\ \{2n + 1\colon n = 0, 1, 2, 3\ldots\}\ \text{ou}\ \{2n - 1\colon n \in \mathbf{N}\}$$

Quando lidamos com subconjuntos de um mesmo conjunto X, entende-se por *complementar* de um conjunto A, indicado pelo símbolo A^c ou $X - A$, como sendo o conjunto dos elementos de X que não estão em A, como ilustra o diagrama da Fig. 1.2a, isto é,

$$A^c = X - A = \{x \in X\colon\ x \notin A\}.$$

É claro que $X^c = \phi$ e $\phi^c = X$. O *complementar relativo* de um conjunto A em relação a outro conjunto B, ilustrado no diagrama da Fig. 1.2b, é definido por

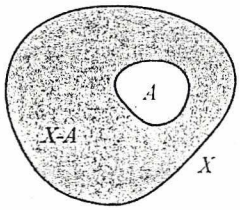
$$B - A = \{x \in B\colon\ x \notin A\}.$$

Deixamos para os exercícios a tarefa de provar que $B - A = B \cap A^c$ e que $B \subset C \Rightarrow A - C \subset A - B$.

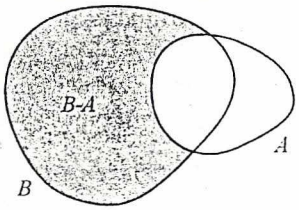
Propriedades gerais

Daremos a seguir uma série de igualdades entre conjuntos, as quais são demonstradas provando, em cada caso, que o primeiro membro está contido no segundo e que o segundo está contido no primeiro:

$$A \cup B = B \cup A;\ \ A \cap B = B \cap A;\ \ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$$



(a)



(b)

Fig. 1.2

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C; \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

As chamadas *leis de De Morgan*, no caso de dois conjuntos A e B, afirmam que

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{e} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

ou seja, *o complementar da união é a interseção dos complementares e o complementar da interseção é a união dos complementares.*

Exercícios

1. Prove que $A \cup B = B \cup A$, $A \cup A = A$ e que $A \cap A = A$.
2. Prove que $A \cap B = B \cap A$.
3. Prove que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
4. Prove que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
5. Prove que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
6. Prove que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
7. Prove que $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$. Faça um diagrama ilustrativo.
8. Prove que $B - A = B \cap A^c$. Faça um diagrama ilustrativo.
9. Prove as leis de De Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{e} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

10. Prove que $(A - B) \cap (B - A) = \phi$. Faça um diagrama ilustrativo.
11. Dados dois conjuntos A e B, prove que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$.

Sugestões e soluções

1. Para mostrar que o primeiro membro está contido no segundo, seja $x \in A \cup B$. Então, ou $x \in A$, ou $x \in B$, ou ambos. Se $x \in A$, então $x \in B \cup A$; e também, se $x \in B$, x tem de estar em $B \cup A$. Fica assim provado que $A \cup B \subset B \cup A$. Do mesmo modo prova-se que $B \cup A \subset A \cup B$. Concluímos então que $A \cup B = B \cup A$.

3. Seja $x \in A \cup (B \cup C)$. Se $x \in A$, então $x \in A \cup B$, logo, $x \in (A \cup B) \cup C$; e se $x \in B \cup C$, há duas possibilidades a considerar: $x \in B$ ou $x \in C$. $x \in B$ implica $x \in A \cup B$, logo, $x \in (A \cup B) \cup C$; e $x \in C$ também implica $x \in (A \cup B) \cup C$. Fica assim provado que $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$. A demonstração de que $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ é inteiramente análoga.

8. $x \in B - A \Leftrightarrow x \in B$ e $x \notin A \Leftrightarrow x \in B$ e $x \in A^c \Leftrightarrow x \in B \cap A^c$. Isto significa que $x \in B - A \Leftrightarrow x \in B \cap A^c$, ou seja, $B - A = B \cap A^c$.

9. $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ e $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c$ e $x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$.

Conjuntos finitos e infinitos

O estudo sistemático dos conjuntos, que acabou levando a uma teoria axiomática desse campo de estudos, começou com Georg Cantor (1845–1918), por volta de 1872. Nessa época, Cantor estava iniciando sua carreira profissional e se ocupava do estudo da representação de funções por meio de séries trigonométricas. Isto fez com que ele investigasse os conjuntos de pontos de descontinuidade de tais funções, os mais simples dos quais são conjuntos com apenas um número finito de pontos. Mas o aparecimento de conjuntos cada vez mais complicados acabou levando Cantor a investigar conjuntos infinitos em sua generalidade. Nesse estudo ele introduziu um conceito simples, que logo se revelaria da maior importância — o conceito de *equivalência de conjuntos*.

Segundo Cantor, dois conjuntos são *equivalentes*, ou têm a mesma *cardinalidade*, ou a mesma *potência*, quando é possível estabelecer uma correspondência que leve elementos distintos de um conjunto em elementos distintos do outro, todos os elementos de um e do outro conjunto sendo objeto dessa correspondência. Em termos precisos, a correspondência de que estamos falando chama-se *bijeção*. (Veja a definição de bijeção na p. 102.) Escreveremos $A \leftrightarrow B$ para indicar que existe uma bijeção entre A e B.

Observe que é essa noção de equivalência que dá origem ao conceito abstrato de número natural. De fato, o que faz uma criança de quatro ou cinco anos de idade constatar que numa cesta há três laranjas, noutra três maçãs, e noutra ainda três ovos? Ela chega a essas conclusões — mesmo sem perceber — por constatar que é possível "casar" os elementos de qualquer uma dessas cestas com os elementos de qualquer outra de maneira biunívoca. É essa abstração dos elementos concretos dos conjuntos equivalentes de diferentes objetos que nos leva a formar a noção de número natural, um fenômeno que ocorre muito cedo em nossas vidas.

Assim, denotando com F_n o conjunto dos primeiros números naturais, $F_n = \{1, 2, 3, \ldots n\}$, é precisamente o fato de um conjunto A ser equipotente a F_n que nos faz dizer que A tem n elementos, ou tem o mesmo número de elementos que F_n. Daí definirmos: um conjunto A se diz *finito* quando existe um número natural n tal que A seja equipotente ao conjunto F_n.

Um conjunto se diz *infinito* quando não for finito.

No caso de conjuntos finitos, serem equivalentes corresponde a terem o mesmo número de elementos, de sorte que o conceito de cardinalidade é o recurso natural para estender, a conjuntos infinitos, o conceito de "número de elementos de um conjunto".

Diz-se que dois conjuntos quaisquer A e B têm a mesma *cardinalidade*, ou o mesmo *número de elementos*, se eles forem equipotentes. Como se vê, essa definição, no caso de conjuntos finitos, não traz nada de novo; mas estende, para conjuntos infinitos, a noção de "número de elementos de um conjunto". Tais números são os chamados *números transfinitos.*

Conjuntos enumeráveis

O primeiro conjunto infinito com que nos familiarizamos é o conjunto $\mathbf{N}$ dos números naturais. Chama-se *conjunto enumerável* a todo conjunto equivalente a $\mathbf{N}$.

Um dos primeiros fatos surpreendentes que surge na consideração de conjuntos infinitos diz respeito à possibilidade de haver equivalência entre um conjunto e um seu subconjunto próprio. Por exemplo, a correspondência $n \mapsto 2n$, que ao 1 faz corresponder 2, ao 2 faz corresponder 4, ao 3 faz corresponder 6, etc., estabelece equivalência entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números pares positivos. Veja: o conjunto dos números pares positivos é um subconjunto próprio do conjunto $\mathbf{N}$; no entanto, tem a mesma cardinalidade que $\mathbf{N}$, ou seja, o mesmo número de elementos. Este fenômeno é uma peculiaridade dos conjuntos infinitos e em nada contradiz o que já sabemos sobre conjuntos finitos.

A enumerabilidade do conjunto Q

Se é surpreendente que o conjunto $\mathbf{N}$ seja equivalente a vários de seus subconjuntos próprios, mais surpreendente é que o conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais também seja equivalente a $\mathbf{N}$, isto é, seja enumerável.

De acordo com o Exerc. 4 adiante, para provar isso é suficiente trabalhar com o conjunto $\mathbf{Q}_+$ dos racionais positivos. Começamos reunindo as frações em grupos, cada grupo contendo aquelas que são irredutíveis e cuja soma do

numerador com o denominador seja constante. Por exemplo,

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1}$$

é o grupo das frações com numerador e denominador somando 7, enquanto

$$\frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{7}{1}$$

é o grupo correspondente à soma 8. Observe que cada grupo desses tem um número finito de elementos. Basta então escrever todos os grupos, um após outro, na ordem crescente das somas correspondentes, e enumerar as frações na ordem em que aparecem. É claro que todos os números racionais aparecerão nessa lista:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{5}{1}, \ldots$$

Números irracionais

O primeiro número irracional com que nos familiarizamos, ainda no ensino fundamental, é o número π, razão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro. Mas, como a demonstração da irracionalidade desse número está fora do alcance da Matemática do ensino fundamental e médio, o aluno é apenas informado de que a expansão decimal desse número é infinita e não periódica.

Um pouco mais tarde, ainda no ensino fundamental, o aluno trava conhecimento com os radicais; e, novamente, é apenas informado de que números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc., são números irracionais (embora esteja perfeitamente ao seu alcance entender a demonstração de irracionalidade de $\sqrt{2}$ que fizemos atrás, bem como outras demonstrações dadas nos exercícios).

Esse "aprendizado" dos números irracionais pode deixar no aluno a impressão de que números irracionais são o π e alguns radicais; e ele talvez até forme a idéia de que o conjunto desses números seja bem reduzido, no máximo enumerável. Mas isto não é verdade; trata-se de um conjunto infinito e não enumerável (Exerc. 7 adiante), fato este que segue como conseqüência da não enumerabilidade do conjunto dos números reais, que provaremos a seguir.

A não enumerabilidade do conjunto R

Vimos, um pouco atrás, que o conjunto **Q** é enumerável. Isto poderia até sugerir que todos os conjuntos infinitos fossem enumeráveis, como de fato se acreditava fosse verdade. Em 1874 Cantor surpreendeu o mundo matemático com uma de suas primeiras descobertas importantes sobre conjuntos, a de que o conjunto dos números reais não é enumerável, ou seja, tem cardinalidade diferente da do conjunto **N** dos números naturais.

Para provar isso trabalharemos com os números do intervalo (0, 1), que tem a mesma cardinalidade da reta toda (Exerc. 8 adiante). Usaremos a representação decimal. Observamos que alguns números têm mais de uma representação, como 0,4 e $0,3999\ldots$ Para que isto não aconteça, adotaremos, para cada número, sua representação decimal infinita. Assim,

$$0,437 = 0,436999\ldots; \quad 0,052 = 0,051999\ldots; \text{ etc.}$$

E com esse procedimento cada número terá uma única representação decimal infinita.

Suponhamos que fosse possível estabelecer uma correspondência biunívoca dos números do intervalo (0, 1) com os números naturais. Isto é o mesmo que supor que os números desse intervalo sejam os elementos de uma seqüência $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Escritos em suas representações decimais, esses números seriam, digamos,

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots \\
x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n}\ldots \\
x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n}\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn}\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

onde os a_{ij} são algarismos de zero a 9.

O último passo, que nos levará a uma contradição, consiste em produzir um número do intervalo (0, 1) que não esteja nessa lista. Isso é feito pelo chamado *processo diagonal* de Cantor, usado em muitas outras situações. Construímos um número que seja diferente de x_1 na primeira casa decimal, diferente de x_2 na segunda casa, diferente de x_3 na terceira casa, e assim por diante, de sorte que esse número não coincidirá com nenhum dos números da lista acima. Para termos uma regra específica[3], seja $x = 0, a_1a_2a_3\ldots$ o número desejado, onde $a_i = 6$ se $a_{ii} = 5$ e $a_i = 5$ se $a_{ii} \neq 5$. Como esse número x não está na lista acima, chegamos a um absurdo, o que nos leva a concluir que o conjunto dos úmeros reais não é enumerável.

Veja outra demonstração da não enumerabilidade dos números reais na p. 71.

[3] A regra não pode produzir um número que só contenha zeros a partir de uma certa casa decimal, pois tal número seria convertido noutro com algarismos 9 a partir dessa mesma casa, o qual poderia coincidir com algum número da lista.

Exercícios

1. Construa uma bijeção entre o conjunto N e o conjunto dos números ímpares positivos.
2. Construa uma bijeção entre o conjunto N e o conjunto dos números quadrados perfeitos.
3. Construa uma bijeção entre o conjunto N e seu subconjunto $\{n, n+1, n+2, \ldots\}$.
4. Sejam A um conjunto finito e B um conjunto enumerável. Mostre que o conjunto $A \cup B$ é enumerável.
5. Supondo que A e B sejam dois conjuntos infinitos enumeráveis, mostre que $A \cup B$ é enumerável. Prove, em seguida, que a união finita de conjuntos enumeráveis é enumerável.
6. Prove que se um conjunto infinito não enumerável A é a união de dois outros B e C, então pelo menos um destes não é enumerável.
7. Prove que o conjunto dos números irracionais não é enumerável.
8. Construa uma bijeção do intervalo $(0, 1)$ na reta $(-\infty, +\infty)$.
9. Mostre que todo conjunto infinito possui um subconjunto enumerável.
10. David Hilbert (1862–1943) certa vez observou que um hotel com um número infinito de quartos sempre pode acomodar mais hóspedes, até mesmo uma infinidade deles, mesmo que os quartos do hotel já estejam todos ocupados. Mostre como fazer isso.

Respostas, sugestões e soluções

1. $n \mapsto 2n+1$, $n = 0, 1, 2\,3, \ldots$.
4. Suponhamos que os elementos de A e B já estejam enumerados, de sorte que
$$A = \{a_1, \ldots a_r\} \ \ e \ \ B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}.$$
Isto sugere a bijeção $f\colon \mathrm{N} \mapsto A \cup B$, assim definida:
$$f(j) = a_j, \ \ j = 1, \ldots, r; \quad f(j) = b_{j-r}, \ \ j = r+1, r+2, \ldots$$
5. Suponha primeiro que os conjuntos A e B sejam disjuntos. Em seguida, resolva também o caso em que eles tenham interseção não vazia. No caso de vários conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, raciocine indutivamente, observando que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3)$, etc.
7. Se fosse finito ou enumerável, também seria enumerável o conjunto dos números reais. Por quê?
8. Uma possibilidade é $y = \mathrm{tg}(\pi x - \pi/2)$. Faça o gráfico para se certificar. Ache outra solução. Faça o gráfico de $y = -1/x$ e veja que esta função tem o comportamento desejado na origem, mas não em $x = 1$. Faça o gráfico de $y = 1/(1-x)$ e veja que esta tem o comportamento desejado em $x = 1$, mas não na origem. E a soma das duas, resolve? Seria $y = (2x-1)/x(1-x)$. Estude o gráfico desta função.
9. Escolha um elemento qualquer do conjunto e denote-o x_1. Escolha outro elemento e denote-o x_2. Escolha outro diferente de x_1 e de x_2 e denote-o x_3, e assim por diante. O processo continua indefinidamente porque o conjunto dado é infinito, de forma que, para todo inteiro positivo n, será sempre possível encontrar um elemento do conjunto, diferente de x_1, x_2, x_n, que será denotado x_{n+1}.
10. Se chegar um hóspede novo, coloque-o no quarto número 1, transferindo o hóspede que estava neste quarto para o quarto 2, o do quarto 2 para o quarto 3, e assim por diante. E se chegarem n hóspedes? Se chegarem infinitos hóspedes, também não há problema, mude o hóspede do quarto n para o quarto $2n$; assim ficarão vagos os infinitos quartos de números ímpares, para abrigar os infinitos hóspedes que estão chegando.

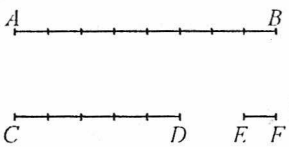
Grandezas incomensuráveis

Historicamente, a primeira evidência da necessidade dos números irracionais ocorre com a idéia de "incomensurabilidade", que explicaremos logo adiante. Comecemos lembrando que na Grécia antiga, os únicos números reconhecidos como tais eram os números naturais 2, 3, 4, etc. O próprio 1 não era considerado número, mas a "unidade", a partir da qual se formavam os números. As frações só apareciam indiretamente, na forma de razão de duas grandezas, como, por exemplo, quando dizemos que o volume de uma esfera está para o volume do cilindro reto que a circunscreve como 2 está para 3.

Os números que hoje chamamos de "irracionais" também não existiam na Matemática grega. Assim como as frações, eles iriam aparecer indiretamente, também como razões de grandezas da mesma espécie, como comprimentos, áreas ou volumes; e, ao que parece, foram descobertos no século V a.C. Não sabemos se essa descoberta foi feita por um argumento puramente numérico, como o da demonstração da p. 8; pode ser que os gregos tenham utilizado alguma construção geométrica, como a que vamos descrever adiante, envolvendo a diagonal e o lado de um quadrado.

A medição de segmentos

Para bem entender essa questão, comecemos lembrando o problema de comparar grandezas da mesma espécie, como dois segmentos de reta, duas áreas ou dois volumes. Por exemplo, no caso de dois segmentos retilíneos AB e CD, dizer que a razão AB/CD é o número racional m/n, significa que existe um terceiro segmento EF tal que AB seja m vezes EF e CD n vezes esse mesmo segmento EF. Na Fig. 1.3 ilustramos essa situação com $m = 8$ e $n = 5$.



$$\frac{AB}{CD} = \frac{8}{5}$$

Fig. 1.3

Note bem que AB e CD são segmentos, não números. É por isso que "razão" não é o mesmo que "fração". Os gregos não usavam "frações", apenas "razões". E não escreviam AB/CD para indicar a razão de dois segmentos. Mesmo nos dias de hoje costuma-se escrever $AB : CD = m : n$, e dizer "AB está para CD assim como m está para n". Quando indicamos a razão com AB/CD, em vez de $AB : CD$, não devemos confundí-la com fração.

No tempo de Pitágoras (580-500 a.C. aproximadamente) — e mesmo durante boa parte do século V a.C. —, pensava-se que dados dois segmentos quaisquer, AB e CD, seria sempre possível encontrar um terceiro segmento EF contido um número inteiro de vezes em AB e outro número inteiro de vezes em CD, situação esta que descrevemos dizendo que EF é um *submúltiplo comum* de AB e CD. Uma simples reflexão revela que essa é uma idéia muito razoável; afinal, se EF não serve, podemos imaginar um segmento menor, outro menor ainda, e assim por diante. Nossa intuição geométrica parece dizer-nos que há de existir um certo segmento EF, talvez muito pequeno, mas satisfazendo aos propósitos desejados. Na Fig. 1.4 ilustramos uma situação com segmento EF bem menor que o da Fig. 1.3. O leitor deve ir muito além, imaginando um segmento EF tão pequeno que nem se possa mais desenhar, para se convencer, pela sua intuição geométrica, da possibilidade de sempre encontrar um submúltiplo comum de AB e CD.

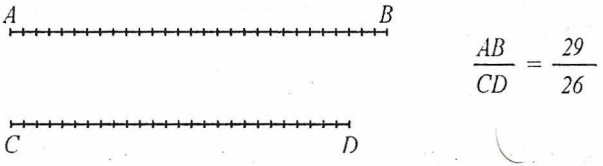


Fig. 1.4

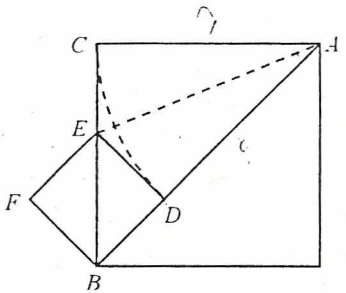
Dois segmentos nessas condições são ditos *comensuráveis*, justamente por ser possível medi-los ao mesmo tempo, com a mesma unidade EF. Entretanto, não é verdade que dois segmentos quaisquer sejam sempre comensuráveis. Em outras palavras, existem segmentos AB e CD sem unidade comum EF, os chamados segmentos *incomensuráveis*. Esse é um fato que contraria nossa intuição geométrica, e por isso mesmo a descoberta de grandezas incomensuráveis na antigüidade foi motivo de muita surpresa para todos os matemáticos daquela época.

Segmentos incomensuráveis

Foram os próprios pitagóricos que descobriram que o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis. Isso aconteceu provavelmente entre 450 e 400 a.C. Vamos descrever, a seguir, um argumento geométrico que demonstra esse fato.

A Fig. 1.5 ilustra um quadrado cuja diagonal é denotada por $\delta = AB$ e cujo lado é $\lambda = AC$. Suponhamos que δ e λ sejam comensuráveis. Então existirá um terceiro segmento σ que seja um submúltiplo comum de δ e λ. Fazemos agora a seguinte construção: traçamos o arco CD com centro em A e o segmento

Fig. 1.5



ED tangente a esse arco em D, de sorte que $AD = AC$. Então, nos triângulos retângulos ACE e ADE, os catetos AC e AD são iguais, e como a hipotenusa AE é comum, concluímos que são também iguais os catetos CE e DE $(= BD)$. Portanto,

$$\delta = AB = AD + BD = \lambda + BD,$$

$$\lambda = BC = BE + EC = BE + BD,$$

ou seja,

$$\delta = \lambda + BD, \tag{1.1}$$

$$\lambda = BE + BD. \tag{1.2}$$

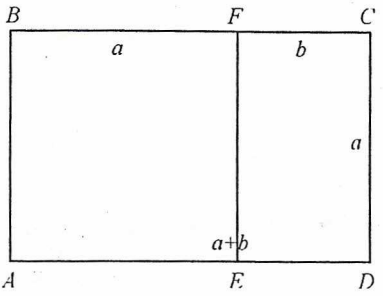
Como o segmento σ é submúltiplo comum de δ e λ, concluímos, por (1.1), que σ também é submúltiplo de BD. Daqui e de (1.2) segue-se que σ também é submúltiplo de BE. Provamos assim que, se houver um segmento σ que seja submúltiplo comum de $\delta = AB$ e $\lambda = AC$, então o mesmo segmento σ será submúltiplo comum de BE e BD, segmentos esses que são a diagonal e o lado do quadrado $BDEF$. Ora, a mesma construção geométrica que nos permitiu passar do quadrado original ao quadrado $BDEF$ pode ser repetida com este último para chegarmos a um quadrado menor ainda; e assim por diante, indefinidamente; e esses quadrados vão-se tornando arbitrariamente pequenos, pois, como é fácil ver, as dimensões de cada quadrado diminuem em mais da metade quando passamos de um deles a seu sucessor. Dessa maneira, provamos que o segmento σ deverá ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto desejemos, que é absurdo. Somos, pois, levados a rejeitar a suposição inicial de comensurabilidade de AC e AB. Concluímos, pois, que o *lado e a diagonal de qualquer quadrado são grandezas incomensuráveis*,

como queríamos provar.

O retângulo áureo

Há vários outros modos de estabelecer a existência de segmentos incomensuráveis, um dos quais baseado no "retângulo áureo", que discutiremos a seguir.

Fig. 1.6



Chama-se *retângulo áureo* a qualquer retângulo $ABCD$ (Fig. 1.6) com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado. como $ABFE$, o retângulo restante, $CDEF$, será semelhante ao retângulo original. Se $a+b$ e a são os comprimentos dos lados do retângulo original, a definição de retângulo áureo traduz-se na seguinte relação:

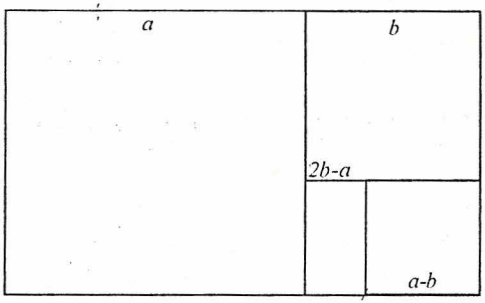
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}. \tag{1.3}$$

O retângulo áureo tem sido considerado, desde a antigüidade grega, como o retângulo mais bem proporcionado e de maior valor estético; e tem sido utilizado por vários arquitetos e pintores em suas obras de arte.

A razão $\phi = a/b$ é chamada *razão áurea*. Às vezes, o inverso desse número, $\varphi = 1/\phi = b/a$, é chamado *número áureo*. Dividindo numerador e denominador da primeira fração em (1.3) por b, obtemos a equação do 2º grau $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ para determinar ϕ. Como já sabemos que este número é positivo, seu valor é a raiz positiva da equação anterior, isto é, $\phi = (\sqrt{5}+1)/2 \approx 1,618$. O número áureo, por sua vez, resulta ser $\varphi = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0,618$. Observe que $\phi = \varphi + 1$, de sorte que ϕ e φ têm a mesma parte decimal. Note também que $\phi = 1/\varphi$.

A expressão numérica de ϕ já prova que este número é irracional. No entanto, podemos provar, geometricamente, como no caso do lado e diagonal de um quadrado, que os lados de um retângulo áureo são incomensuráveis. (Veja o Exerc. 2 adiante.)

Fig. 1.7



Uma infinidade de retângulos áureos

Voltando à relação (1.3), uma propriedade bem conhecida das proporções permite escrever:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{(a+b)-a}{a-b}, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}.$$

Isto mostra que se o retângulo de lados $a+b$ e b é áureo, também o é o retângulo de lados a e b. O mesmo raciocínio se aplica para mostrar que são também áureos os retângulos de lados b e $a-b$, $a-b$ e $2b-a$, etc. (Fig. 1.7). Em outras palavras, dados os números positivos a e b, satisfazendo a relação (1.3), formamos a seqüência $a+b$, a, b, a_2, a_3,..., onde

$$a_2 = a - b, \quad a_3 = b - a_2 = 2b - a, \ldots \quad a_n = a_{n-2} - a_{n-1}. \tag{1.4}$$

Pelo raciocínio anterior, quaisquer dois elementos consecutivos dessa seqüência são os lados de um retângulo áureo.

Divisão áurea

Diz-se que um ponto C de um segmento AB (Fig. 1.8) divide esse segmento na *razão áurea* se

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}. \tag{1.5}$$

Diz-se também que C divide AB em *media e extrema razão* (ou *meia e extrema razão*), isto porque o segmento AC aparece duas vezes na proporção como termos do meio, enquanto AB e CB são os termos extremos.

A relação (1.5) é precisamente a relação (1.3) se pusermos $AC = a$ e $CB = b$, de sorte que os segmentos AC e CB (ou $AB = a+b$ e $AC = a$) da divisão áurea

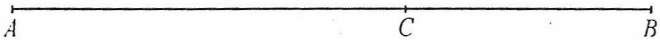


Fig. 1.8

são os lados de um retângulo áureo, e (1.5) é a razão áurea ϕ já encontrada anteriormente.

É interessante notar que se C_1 divide AB em média e extrema razão, e se marcarmos no segmento AB os pontos C_2, C_3, $C_4, \ldots$, de tal maneira que $AC_2 = C_1B$, $AC_3 = C_2C_1$, $AC_4 = C_3C_2, \ldots$ (Fig. 1.9), então C_n divide AC_{n-1} em média e extrema razão, $n = 2, 3, 4, \ldots$ Este resultado segue do que já provamos sobre a seqüência infinita de retângulos áureos, donde segue também que os segmentos AC_1 e C_1B da divisão áurea de AB são incomensuráveis. (Veja o Exerc. 2 adiante e o Exerc. 22 da p. 63.)

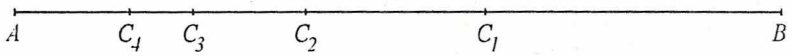


Fig. 1.9

Exercícios

1. Utililzando o Teorema de Pitágoras e o fato de que o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis, prove que não existe número racional cujo quadrado seja 2.
2. Prove, geometricamente, que os lados de um retângulo áureo são grandezas incomensuráveis.
3. Desenhe um pentágono regular de lado l e diagonal d. Prove que d/l é a razão áurea (donde segue que esses segmentos são incomensuráveis).
4. Prove, geometricamente, que o lado e a diagonal de um pentágono regular são incomensuráveis.
5. Dado um segmento AB de comprimento a, construa geometricamente um retângulo áureo com lado menor igual ao segmento AB.
6. Utilize a construção do exercício anterior para construir, geometricamente, o ponto C que faz a divisão áurea do segmento AB.

Sugestões

1. Tome um quadrado de lado unitário e aplique o teorema de Pitágoras.
2. Com referência à Fig. 1.8, suponha que existam um segmento σ e números inteiros a e b satisfazendo a condição:

$$AD = (a+b)\sigma \quad \text{e} \quad AB = b\sigma.$$

Em conseqüência, todos os números da seqüência (1.4) seriam inteiros. Termine a demonstração.

3. Sejam $ABCDE$ o pentágono, F e G as interseções das diagonais AD e AC com a diagonal BE. Prove que os triângulos ABE e BGA são semelhantes e utilize essa semelhança.
4. As diagonais de um pentágono regular formam um pentágono regular menor. Raciocine como no caso do quadrado discutido no texto.
5. Sejam $ABCD$ um quadrado, e E o ponto médio de AB. Marque o ponto F no prolongamento de AB, de forma que $EF = EC$. Aplique o Teorema de Pitágoras ao triângulo EBC e obtenha $(a + b)a = ab$, mostrando que o retângulo de lados AB e AF é áureo.

A crise dos incomensuráveis e sua solução

A descoberta de grandezas incomensuráveis foi feita pelos próprios pitagóricos; e representou um momento de crise na Matemática, como explicaremos a seguir.

Devemos lembrar que Pitágoras notara certas relações numéricas envolvendo o comprimento de uma corda musical e o som por ela emitido. Ao que parece, ele fez observações semelhantes com relação a outros fenômenos, intuindo daí que o número fosse de fato a essência de todos os fenômenos, permeando a Natureza inteira. Sendo assim, era de se esperar que a razão de dois segmentos de reta pudesse sempre ser expressa como a razão de dois números (naturais).

Como vimos na p. 19, dizer que a razão de dois segmentos A e B é a fração m/n significa dizer que existe um segmento σ tal que $A = m\sigma$ e $B = n\sigma$. Ora, com a descoberta dos incomensuráveis, ficou claro que isso nem sempre seria possível. Como então poderia o número ser o fundamento de todos os fenômenos naturais, se nem sequer eram suficientes para exprimir a razão de dois segmentos?

A teoria das proporções

Para nós hoje é fácil perceber que a crise dos incomensuráveis seria resolvida com a introdução, na Matemática, dos números fracionários e dos números irracionais. Mas os gregos tomaram outro caminho, inventando um modo de falar em igualdade de razões mesmo no caso de grandezas incomensuráveis. Com isso criaram toda uma teoria das proporções que só dependia dos números naturais.[4] O criador dessa teoria, exposta no Livro V dos Elementos de Euclides,[5] foi Eudoxo (408-355 a.C. aproximadamente), matemático e astrônomo ligado à escola de Platão.

Como já observamos, os gregos não definiam "razão"; trabalhavam com esse conceito como se fosse um "conceito primitivo". Bastava-lhes saber o significado da igualdade de duas razões, e isso era feito em termos dos números naturais. Assim, no caso de dois segmentos comensuráveis A e B, Eudoxo deve ter percebido que dizer que A está para B assim como m está para n equivale a dizer que

[4] Veja nosso artigo na RPM 7.

[5] Veja a nota sobre o conteúdo dos Elementos de Euclides no final do capítulo.

$nA = mB$ (veja o Exerc. 3 adiante). Então, no caso de quatro segmentos, dizer que A está para B assim como C está para D deveria significar a existência de dois números m e n tais que

$$nA = mB \quad \text{e} \quad nC = mD.$$

No caso em que A e B forem incomensuráveis, igualdades do tipo $nA = mB$ nunca ocorrerão. Mas, dados dois números m e n, podemos sempre testar se

$$nA > mB, \quad nA = mB \quad \text{ou} \quad nA < mB;$$

e igualmente, se

$$nC > mD, \quad nC = mD \quad \text{ou} \quad nC < mD;$$

Pois bem, esse teste é o que Eudoxo utiliza para dar uma definição de igualdade de duas razões, $A : B$ e $C : D$, que se aplique sempre, sejam os segmentos comensuráveis ou não.

1.2. Definição (de Eudoxo). *Dadas quatro grandezas da mesma espécie, A, B, C e D (segmentos, áreas ou volumes), diz-se que A está para B assim como C está para D se, quaisquer que sejam os números m e n, se tenha:*

$$nA > mB \Leftrightarrow nC > mD; \quad nA = mB \Leftrightarrow nC = mD;$$

$$nA < mB \Leftrightarrow nC < mD.$$

Observe, pelo Exerc. 3 adiante, que no caso em que A e B são comensuráveis, $A : B = m : n$ equivale a dizer que $nA = mB$. Então, de acordo com a Definição de Eudoxo, no caso comensurável, dizer que $A : B = C : D$ equivale a dizer que $nA = mB \Leftrightarrow nC = mD$. No caso incomensurável, estas igualdades nunca acontecem; mas Eudoxo continua definindo a igualdade $A : B = C : D$ desde que, para todos os números m e n,

$$nA > mB \Leftrightarrow nC > mD \quad \text{e} \quad nA < mB \Leftrightarrow nC < mD.$$

Desenvolvimento posterior da Matemática

Com sua definição de igualdade de duas razões, Eudoxo constrói a teoria das proporções, utilizando apenas os números inteiros. Embora tenha sido uma solução genial da crise dos incomensuráveis, ela atrasou por mais de mil anos o desenvolvimento da Aritmética e da Álgebra, pois subordinou essas disciplinas aos estudos de Geometria, como retrata muito bem a exposição feita nos Elementos de Euclides.

Foi somente a partir do início do século XIII que a "matemática numérica" começa a chegar à Europa, vinda da India e da China por intermédio dos árabes. Três séculos mais tarde a Álgebra começa a se desenvolver, sobretudo na Itália, preparando o terreno para todo o desenvolvimento da Geometria Analítica e do Cálculo no século XVII.

Convém notar que todo esse desenvolvimento mais recente da Matemática, sobretudo nos séculos XVII e XVIII, se deu graças à atitude dos matemáticos, que não se deixaram vencer pelas dificuldades naturais da falta de uma teoria dos fundamentos. Como dissemos há pouco, os gregos, ao resolverem a crise dos incomensuráveis, acabaram desviando-se do curso natural de evolução da Matemática por se apegarem a excessivos critérios de rigor. Ao contrário disso, seus colegas dos últimos séculos não se ativeram tanto às exigências do rigor, por isso mesmo desbravaram e conquistaram territórios consideráveis.

A Matemnática desenvolveu-se extensamente nos tempos modernos (isto é, a partir do século XVI), até o início do século XIX, mesmo sem qualquer fundamentação dos diferentes sistemas numéricos. Trabalhavam-se livremente com os números racionais e irracionais, desenvolvendo todas as suas propriedades, sem que houvesse uma teoria embasando esse desenvolvimento. Isso acontecia muito à maneira do que fazemos hoje no ensino fundamental, quando introduzimos os radicais. Assim, acostumamo-nos com propriedades como esta, que permite multiplicar dois números irracionais, resultando em um número inteiro: $\sqrt{12}\sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$; mas aprendemos a trabalhar com essas propriedades antes mesmo de termos uma teoria que as justifique.

Foi só em meados do século XIX que os matemáticos começaram a sentir necessidade de uma fundamentação rigorosa dos diferentes sistemas numéricos. E é interessante observar que a fundamentação desses sistemas ocorreu na ordem inversa: primeiro foram organizados os números complexos, depois os números reais, os racionais, os inteiros e, finalmente, os números naturais.

Exercícios

1. Dizemos que duas frações são iguais quando têm a mesma forma irredutível. Por exemplo, 12/40=18/60, pois

$$\frac{12}{40} = \frac{3 \times 4}{10 \times 4} = \frac{3}{10} \quad \text{e} \quad \frac{18}{60} = \frac{3 \times 6}{10 \times 6} = \frac{3}{10}.$$

Mas podemos também definir igualdade de frações pela igualdade do produto dos meios com o produto dos extremos, como neste exemplo:

$$\frac{12}{40} = \frac{18}{60} \Leftrightarrow 12 \times 60 = 18 \times 40.$$

Prove que esses dois modos de definir igualdade de frações são equivalentes, isto é, prove o seguinte: *dadas duas frações* m/n *e* m'/n', $mn' = m'n \Leftrightarrow$ *existem números primos entre si* p *e* q, *e números inteiros positivos* a *e* b, *tais que*

$$m = ap,\ n = aq \quad \text{e} \quad m' = bp,\ n' = bq.$$

2. Na p. 19 definimos razão de dois segmentos comensuráveis: AB e CD são comensuráveis e estão entre si na razão m/n se existem números m e n e um segmento σ tais que $AB = m\sigma$ e $CD = n\sigma$. Prove que essa definição é consistente, isto é, prove que se existirem dois outros números m' e n' e um segmento σ' tais que $AB = m'\sigma'$ e $CD = n'\sigma'$, então $m/n = m'/n'$.
3. Prove que duas grandezas comensuráveis A e B estão entre si na razão m/n se e somente se $nA = mB$.
4. Prove que o conjunto E das raízes quadradas de 2 por falta não tem máximo.
5. Prove que o conjunto D das raízes quadradas de 2 por excesso não tem mínimo.

Sugestões e soluções

1. A demonstração no sentido $\Leftarrow$ é fácil e fica a cargo do leitor. Para demonstrar a recíproca, suponha que $mn' = m'n$. Sendo a o mdc de m e n, teremos: $m = ap$ e $n = aq$, onde p e q são primos entre si. Destas duas últimas relações segue-se que $mn' = apn'$ e $m'n = aqm'$; e destas obtemos $pn' = qm'$. Daqui se conclui que p divide o produto $m'q$, e, como é primo com q, divide m'. Portanto, existe b tal que $m' = bp$. Finalmente, para provar que $n' = bq$, basta substituir $m' = bp$ em $pn' = qm'$.
2. Prove que $nA = mB$; em seguida, que $nm'\sigma' = mn'\sigma'$, donde $nm' = mn'$.
3. Não pode simplesmente escrever $A/B = m/n$ e multiplicar cruzado; afinal, é precisamente isto que se pede para provar!
4. O que se deseja provar é que se r é um número racional positivo tal que $r^2 < 2$, existe outro número racional $s > r$ tal que $s^2 < 2$. Isto se consegue aumentando r de uma quantidade bem pequena, digamos, $1/n$, com n um inteiro bem grande. Mas quão grande? Vejamos: tomando $s = r + 1/n$, queremos que

$$s^2 = \left(r + \frac{1}{n}\right)^2 < 2,$$

ou seja,

$$r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} < 2,$$

ou ainda,

$$\left(2r + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} < 2 - r^2.$$

Temos de resolver esta inequação para determinar possíveis valores de n. Podemos evitar isso, resolvendo uma inequação bem mais simples. Para isso adotamos um procedimento que é freqüente em Análise: como $n \geq 1$, temos que $1/n \leq 1$, portanto,

$$\left(2r + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} \leq (2r+1)\frac{1}{n}$$

Agora basta resolver a inequação

$$(2r+1)\frac{1}{n} < 2 - r^2,$$

que resulta em $n > (2r+1)/(2-r^2)$. É claro que com qualquer n nessas condições teremos também $(r + 1/n)^2 < 2$, que é o resultado desejado.

5. Imite a demonstração anterior, começando com $r^2 > 2$ e procurando determinar $s = r - 1/n$ tal que $s^2 > 2$. Veja:

$$s^2 = \left(r - \frac{1}{n}\right)^2 = r^2 - \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} > r^2 - \frac{2r}{n}.$$

Dedekind e os números reais

Vários matemáticos do século XIX cuidaram da construção dos números reais, dentre eles Richard Dedekind, Karl Weierstrass, Charles Méray e Georg Cantor. Mas as teorias dos números reais que permaneceram foram a de Dedekind e a de Cantor. Exporemos, nesta seção a construção de Dedekind, e no capítulo seguinte a de Cantor. Não faremos uma exposição tecnicamente detalhada, antes vamos nos concentrar nas idéias de Dedekind, procurando dar uma boa compreensão de todo o seu trabalho, principalmente da propriedade de completude dos números reais, expressa nos Teoremas 1.5 e 1.7 adiante.

Richard Dedekind (1831–1916) estudou em Göttingen, onde foi aluno de Gauss e Dirichlet. Em 1858 tornou-se professor em Zurique, transferindo-se em 1862 para Braunschweig (ou Brunswick), sua terra natal, onde permaneceu pelo resto de sua vida.

Ele conta que no início de sua carreira em 1858, quando teve de ensinar Cálculo Diferencial, percebeu a falta de uma fundamentação adequada para os números reais, principalmente quando teve de provar que uma função crescente e limitada tem limite (Teorema 4.14, p. 114). E é também ele mesmo quem conta que foi buscar inspiração para sua construção dos números reais na antiga e engenhosa teoria das proporções de Eudoxo. Assim, em 1887 ele escreve: "...e se interpretamos número como razão de duas grandezas, há de se convir que tal interpretação já aparece de maneira bem clara na célebre definição dada por Euclides sobre igualdade de razões. Aí reside a origem de minha teoria (...) e muitas outras tentativas de construir os fundamentos dos números reais".

Cortes de Dedekind

Observe que a definição de Eudoxo associa, a cada par de grandezas, digamos (A, B), dois conjuntos de pares (m, n) de números naturais: o conjunto E ("E" de esquerda) dos pares para os quais $mB < nA$ (que fariam $m/n < A/B$ se A/B tivesse significado numérico) e o conjunto D ("D" de direita) dos pares para os quais $mB > nA$ (que fariam $A/B < m/n$ se A/B tivesse significado numérico).

Inspirando-se na definição de Eudoxo, Dedekind parece ter notado que o procedimento do sábio grego leva a uma separação dos números racionais em dois conjuntos. Assim, qualquer número racional r efetua um "corte" ou separação de todos os demais números racionais no conjunto E dos números menores do

que r e no conjunto D dos números maiores do que r; o próprio número r pode ser incluído como o maior elemento de E ou o menor elemento de D.

Mas, além desses "cortes", há outros, como exemplifica o clássico caso de $\sqrt{2}$. O processo de encontrar a raiz quadrada de 2 conduz à separação dos números racionais em dois conjuntos: o conjunto E das raízes quadradas aproximadas por falta (aí incluídos o zero e os racionais negativos), e o conjunto D das raízes aproximadas por excesso. Só que agora esse corte não tem elemento de separação; de fato, já vimos (Exercs. 4 e 5 atrás) que o conjunto das raízes por falta não tem elemento máximo e o conjunto das raízes por excesso não tem elemento mínimo. No modo de ver de Dedekind, o número irracional $\sqrt{2}$ deve ser criado como elemento de separação entre os conjuntos desse corte.

Dedekind generaliza esse procedimento, primeiro definindo *corte* de maneira geral, no conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais.

1.3. Definição. *Entenderemos por corte* (ou "corte racional"), *todo par* (E, D) *de conjuntos não vazios de números racionais, cuja união é* $\mathbf{Q}$, *e tais que todo elemento de* E *é menor que todo elemento de* D.

(Essa definição permite provar (Exerc. 1 adiante) que o conjunto E é uma semi-reta para $-\infty$ e o conjunto D uma semi-reta para $+\infty$.) Em seguida Dedekind postula que todo corte possui elemento de separação, que tanto pode ser incorporado a E como o seu maior elemento, ou a D como o seu menor elemento. Suporemos que o elemento de separação seja sempre incorporado a D. Assim, em todo corte, o conjunto D tem mínimo; e os cortes que não são determinados por números racionais dão origem aos números irracionais.

Dedekind observa que a existência de cortes sem elementos de separação no conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais é a expressão aritmética da descontinuidade de $\mathbf{Q}$, ao passo que, com a adjunção dos novos elementos - – os números irracionais — obtemos o conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais, que, ao contrário de $\mathbf{Q}$, é agora um "contínuo numérico", pois os irracionais vêm preencher as "lacunas" de descontinuidade então existentes em $\mathbf{Q}$.

A relação de ordem

Mas não basta apenas juntar a $\mathbf{Q}$ os novos elementos para obter $\mathbf{R}$. Este conjunto precisa ter a estrutura que dele se espera, daí termos de definir as operações usuais de adição, multiplicação, etc., e a relação de ordem. E fazer isso de maneira a também provar as propriedades usuais desses números, que já conhecemos e usamos desde o ensino fundamental.

No que diz respeito à relação de ordem, por exemplo, devemos introduzi-la em $\mathbf{R}$ de forma a preservar a ordem já existente entre os racionais. Para isto, sejam α e β dois números reais quaisquer, caracterizados pelos cortes que

determinam no conjunto **Q**. Assim, $\alpha = (E_1, D_1)$ e $\beta = (E_2, D_2)$. Dizemos que $\alpha = \beta$ se $E_1 = E_2$ e $\alpha < \beta$ se E_1 é um subconjunto próprio de E_2.

Essa ordem, de fato, preserva a ordem já existente em **Q**, pois se α e β forem ambos racionais, a definição que acabamos de dar de que $\alpha < \beta$ significa que todo valor aproximado por falta de α também o é de β, mas este tem valores aproximados por falta superiores a todos os de α, que é exatamente como deve ser para preservar a ordem preexistente em **Q**.

Operações com números reais

Além da relação de ordem, é necessário definir a adição e a multiplicação de números reais, os inversos aditivo e multiplicativo, e demonstrar todas as propriedades já conhecidas para os números racionais, bem como demonstrar que tudo o que já valia no conjunto **Q** permanece válido dentro da nova estrutura de **R**.

Não é nosso objetivo desenvolver aqui todo esse programa. Daremos uma idéia de como isso é feito no caso da adição, indicando ao leitor o capítulo 1 do livro de Rudin, ou o capítulo 28 do livro de Spivak (veja a bibliografia no fim do livro) para um tratamento completo desses tópicos. Notamos que, para simplificar, nessas duas referências o conceito de corte é identificado com apenas o conjunto E das aproximações por falta do número que ele define. De fato, isto é suficiente, como no caso de $\sqrt{2}$, cuja caracterização é completa com apenas as raízes aproximadas por falta, que determinam também as raízes por excesso.

A maneira natural de definir a soma de dois números reais $\alpha = (E_1, D_1)$ e $\beta = (E_2, D_2)$ consiste em construir o par $(E, D) = \alpha + \beta$, onde E é o conjunto das somas de elementos de E_1 com elementos de E_2, e D o conjunto das somas de elementos de D_1 com elementos de D_2. Todavia, para facilitar as demonstrações, é mais conveniente adotar a definição dada a seguir.

1.4. Definição. *Dados os números reais* $\alpha = (E_1, D_1)$ *e* $\beta = (E_2, D_2)$, *definimos sua soma* $\alpha + \beta$ *como sendo o corte* (E, D), *onde*

$$E = \{x + y\colon\ x \in E_1,\ y \in E_2\}$$

e D *é o conjunto dos demais números racionais.*

A primeira coisa que temos a fazer após uma definição como esta é provar que o par (E, D) é de fato um corte, isto é, que E e D não são vazios, e que se $x \in E$ e $y \in D$, então $x < y$.

Ora, que $E \neq \phi$ segue do fato de que $E_1 \neq \phi$ e $E_2 \neq \phi$, de forma que existe algum $x + y \in E$. Para provar que $D \neq \phi$ notamos que, tomando $x \in D_1$ e $y \in D_2$, a soma $x + y \in D$, pois $x + y$ é maior que todo elemento de E.

Finalmente temos de provar que todo elemento de E é menor que todo elemento de D. Para isto, sejam $x \in E$ e $y \in D$. Suponhamos, por absurdo,

que $x > y$. Então, $x = y + a$, com $a > 0$; e, como $x \in E$, existem $m \in E_1$ e $n \in E_2$ tais que $x = m + n$. Em conseqüência, $y = x - a = (m - a) + n$; e, como $m - a \in E_1$ e $n \in E_2$, concluímos que $y \in E$, que é absurdo. Assim, somos forçados a aceitar que $x < y$, como queríamos provar.

O teorema de Dedekind

Sabemos que tanto $\mathbf{Q}$ como $\mathbf{R}$ são corpos ordenados. (Veja a definição de corpo na p. 44.) O que realmente diferencia um desses corpos do outro é o fato de $\mathbf{R}$ ser *completo* e $\mathbf{Q}$ não é. Dizer que o conjunto $\mathbf{Q}$ não é completo significa dizer que há cortes sem elemento de separação em $\mathbf{Q}$ (como vimos nos Exercs. 4 e 5 atrás), ao passo que $\mathbf{R}$ ser completo significa que todo corte tem elemento de separação, este elemento podendo estar em $\mathbf{R}$, como no caso de $\sqrt{2}$.

Há várias outras maneiras de expressar a completude do corpo $\mathbf{R}$ dos números reais. Uma delas, demonstrada pelo próprio Dedekind, é o teorema que consideramos a seguir.

1.5. Teorema. *Todo corte de números reais possui elemento de separação.*

Observação. Por corte de números reais entende-se *todo par* (E, D) *de conjuntos não vazios de números reais, cuja união é o conjunto* $\mathbf{R}$, *e tais que todo elemento de* E *é menor que todo elemento de* D. Pois bem, o teorema afirma que, dado qualquer corte desse tipo, sempre haverá um número real α que será, ou o maior elemento de E ou o menor elemento de D.

Demonstração. Começamos observando que o corte dado (E, D), determina também um corte (A, B) de números racionais, A sendo o conjunto dos números racionais contidos em E e B o conjunto dos números racionais contidos em D. Esse corte (A, B) possui um elemento de separação α. Provaremos que α ou é máximo de E ou mínimo de D.

Se α fosse menor do que algum elemento $\beta \in E$, pelo Exerc. 4 adiante, haveria uma infinidade de números racionais compreendidos entre α e β; seja c um deles. Então, $\alpha < c$, donde $c \in B \subset D$. Como $c < \beta$, pelo Exerc. 1 adiante, $\beta \in D$, absurdo, pois $\beta \in E$.

Se α fosse maior do que algum elemento $\beta \in D$, pelo mesmo raciocínio, haveria um número racional c compreendido entre α e β. Então, $\alpha > c$, donde $c \in A \subset E$. Como $c > \beta$, pelo Exerc. 1 adiante, $\beta \in E$, absurdo, pois $\beta \in D$.

Em conseqüência, o número real α é, ou o maior elemento de E ou o menor elemento de D, como queríamos provar.

Veremos outras maneiras úteis de expressar a completude de $\mathbf{R}$, dentre elas

a chamada "propriedade do supremo", que consideramos a seguir.

Supremo e ínfimo de um conjunto

Diz-se que um conjunto C de números reais *é limitado à direita* ou *limitado superiormente* se existe um número K tal que $c \leq K$ para todo $c \in C$. Do mesmo modo, C *é limitado à esquerda* ou *limitado inferiormente* se existe um número k tal que $k \leq c$ para todo $c \in C$. Os números K e k são chamados *cotas* do conjunto C, *superior* e *inferior*, respectivamente. Por exemplo, o conjunto dos números naturais é limitado inferiormente, mas não superiormente, enquanto que o conjunto dos números racionais menores do que 8 é limitado superiormente, mas não inferiormente. O conjunto dos números reais x tais que $x^2 \leq 10$ é limitado, tanto à direita como à esquerda; tal conjunto é o mesmo que o intervalo fechado $[-\sqrt{10},\ \sqrt{10}]$, isto é,

$$[-\sqrt{10},\ \sqrt{10}] = \{x \in R\colon\ x^2 \leq 10\} = \{x \in R\colon\ -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}\}.$$

Um conjunto como este último, que é limitado à direita e à esquerda ao mesmo tempo, é dito, simplesmente, *conjunto limitado*. É também limitado qualquer intervalo de extremos finitos a e b.

Quando um conjunto é limitado superiormente, ele pode ter um elemento que seja o maior de todos, o qual é chamado o *máximo* do conjunto. Por exemplo, o conjunto dos números racionais x tais que $x \leq 10$ tem 10 como seu máximo. Já o conjunto

$$A = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots\right\} \tag{1.6}$$

não tem máximo, embora seja limitado superiormente. Os elementos desse conjunto, como vemos, são frações dispostas de maneira crescente:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \ldots < \frac{n}{n+1} < \ldots$$

e nenhuma dessas frações é maior do que todas as outras. Pelo contrário, qualquer delas é superada pela que vem logo a seguir, isto é,

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}.$$

Não obstante isso, qualquer elemento do conjunto é menor que o número 1, o qual é, portanto, uma de suas *cotas superiores*. Aliás, 1 é a menor dessas cotas, pois, dado qualquer número $c < 1$, é sempre possível encontrar n tal que $c < n/(n+1)$ (Veja o Exerc. 8 adiante), o que quer dizer que c não é cota superior.

Este último exemplo ilustra uma situação interessante: o conjunto é limitado superiormente, não tem máximo, mas tem cota superior mínima. Isto sugere a definição de *supremo*de um conjunto, mediante uma das seguintes proposições (que são equivalentes, como veremos logo a seguir):

1.6. Definição. *Chama-se supremo de um conjunto C à menor de suas cotas superiores.*

Chama-se supremo de um conjunto C ao número S que satisfaz as duas condições seguintes: a) $c \leq S$ para todo $c \in C$; b) dado qualquer número $\varepsilon > 0$, existe um elemento $c \in C$ tal que $S - \varepsilon < c$.

Para vermos que a segunda definição é equivalente à primeira, basta notar que seu item a) nos diz que S é cota superior de C, e o ítem b) está afirmando que não há outra cota menor do que essa; logo, ela é a menor de todas.

Uma pergunta natural que se põe é a de saber se todo conjunto limi tado superiormente tem supremo. A resposta, dada a seguir, é afirmativa.

1.7. Teorema. *Todo conjunto não vazio de números reais, que seja limitado superiormente, possui supremo.* (Esta é a propriedade do supremo que mencionamos atrás.)

Demonstração. Seja C o conjunto em questão. Seja E o conjunto de todos os números reais α que sejam menores que algum elemento de C, e seja D o conjunto dos números reais restantes.

Da própria definição de E e D, vê-se que (E, D) é um corte em $\mathbf{R}$. Seja α o elemento de separação desse corte, portanto, ou α é o maior elemento de E ou o menor elemento de D. Mas α não pode pertencer a E, senão ele seria menor do que um elemento $c \in C$, o mesmo sendo verdade de todos os elementos β entre α e c, donde $\beta \in E$; e α não seria o elemento de separação de (E, D) (faça uma representação gráfica, para ajudar na compreensão).

Assim, concluímos que α é o menor elemento de D, ou seja, a menor cota superior de C, como queríamos provar.

Nessa demonstração não há como saber se o supremo é ou não o máximo do conjunto C. É claro que se o conjunto possui máximo, este é também o seu supremo. Mas o conjunto pode não ter máximo, como no exemplo dado em (1.6). Outro exemplo de conjunto cujo supremo não é máximo é qualquer intervalo aberto à direita, como

$$[-5,\ 12) = \{x \in R:\ -5 \leq x < 12\},$$

que não tem máximo, mas tem 12 como seu supremo.

A parte b) da segunda definição de supremo nos diz que qualquer número à esquerda de S, isto é, $S - \varepsilon$, terá algum elemento c de C à sua direita. Tal

elemento c pode ser o próprio S, quando este for o máximo do conjunto. Por exemplo, o conjunto

$$\{2,\ 3,\ 9/2,\ 5,\ 6,\ 13/2,\ 7\}$$

tem supremo 7, que é também seu máximo. Dado $\varepsilon = 1/2$, $S - \varepsilon$ será $13/2$; e o único elemento do conjunto à direita de $13/2$ é o próprio 7.

A noção de *ínfimo* é introduzida de maneira análoga à de supremo.

1.8. Definição. *Chama-se ínfimo de um conjunto C à maior de suas cotas inferiores*; ou ainda

Chama-se ínfimo de um conjunto C ao número s que satisfaz as duas condições seguintes; a) $s \leq c$ para todo $c \in C$; b) dado qualquer número $\varepsilon > 0$, existe um elemento $c \in C$ tal que $c < s + \varepsilon$.

Com a propriedade do supremo prova-se que *todo conjunto não vazio de números reais, que seja limitado inferiormente possui ínfimo.* (Exerc. 10 adiante.)

Conjuntos não limitados à direita certamente não possuem supremos finitos. Convenciona-se considerar $+\infty$ como o supremo desses conjuntos. Analogamente, $-\infty$ é considerado o ínfimo dos conjuntos não limitados inferiormente.

Observe que se nos ativermos ao conjunto dos números racionais, então não será verdade que todo conjunto limitado superiormente tenha supremo ou que todo conjunto limitado inferiormente tenha ínfimo. Já vimos isso com o exemplo clássico de $\sqrt{2}$ no Exerc. 4 da p. 28.

Observe também que agora, com a propriedade do supremo, podemos demonstrar que o número 2 possui raiz quadrada (Exerc. 13 adiante). Lembre-se do que foi dito na p. 8: a demonstração que lá fizemos foi apenas uma demonstração de que não existe número racional cujo quadrado seja 2. Mais do que isso, provamos agora que qualquer número positivo possui raiz n-ésima (Exerc. 14 adiante).

Exercícios

1. Dado um corte (E, D), prove que se $e \in E$ e $x < e$, então $x \in E$; e que se $d \in D$ e $y > d$, então $y \in D$. Isso significa que E é uma semi-reta que se estende para $-\infty$ e que D uma semi-reta estendendo-se para $+\infty$.
2. Seja r um número racional. Prove que o conjunto E dos números racionais menores do que r não tem máximo; e que o conjunto dos números racionais maiores do que r não tem mínimo.
3. Dados dois números reais quaisquer, α e β, prove a chamada *lei da tricotomia*, que diz: ou $\alpha < \beta$, ou $\alpha = \beta$ ou $\alpha > \beta$.
4. Prove que entre dois números reais distintos há uma infinidade de números racionais.
5. Prove que entre dois números reais distintos há uma infinidade de números irracionais.

6. Dados três números reais α, β e γ, prove que $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$.
7. Dado um número real $\alpha = (E, D)$, defina o oposto $-\alpha$ tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$.
8. Prove que o número 1 é efetivamente o supremo do conjunto definido em (1.6), mostrando que, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que $n \geq N \Rightarrow 1 - \varepsilon < n/(n+1)$.
9. Considere o conjunto $\{1/m - 1/n : m, n \in \mathbb{N}\}$. Prove que -1 e 1 são o ínfimo e o supremo desse conjunto, respectivamente, e que eles não pertencem ao conjunto.
10. Prove que todo conjunto limitado inferiormente tem ínfimo.
11. Prove que $a > 1 \Rightarrow a^n > a$ para todo inteiro $n > 1$.
12. Prove que $0 < a < 1 \Rightarrow a^n < a$ para todo inteiro $n > 1$.
13. Use a propriedade do supremo para provar a existência da raiz quadrada positiva de 2.
14. Generalize o exercício anterior, isto é, use a propriedade do supremo para provar a existência da raiz n-ésima positiva de qualquer número $a > 0, a \neq 1$.
15. Sejam A e B conjuntos numéricos não vazios. Prove que

$$A \subset B \Rightarrow \inf A \geq \inf B \text{ e } \sup A \leq \sup B.$$

16. Sejam A e B dois conjuntos numéricos não vazios, tais que $a \leq b$ para todo $a \in A$ e todo $b \in B$. Prove que $\sup A \leq \inf B$. Com a mesma hipótese, prove ainda que $\sup A = \inf B \Leftrightarrow$ qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $b - a < \varepsilon$.
17. Sejam A e B dois conjuntos numéricos não vazios, limitados inferiormente, e r um número tal que $r \leq a + b$ para todo $a \in A$ e todo $b \in B$. Prove que $r \leq \inf A + \inf B$. Enuncie e demonstre resultado análogo para os supremos.
18. Dados dois conjuntos numéricos limitados A e B, definimos o conjunto $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$. Prove que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, e $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.
19. Dado um conjunto numérico limitado A, e um número real qualquer α, definimos o conjunto $\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$. Mostre então que $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$, $\inf(\alpha A) = \alpha \inf A$ se $\alpha \geq 0$; e $\sup(\alpha A) = \alpha \inf A$ se $\alpha < 0$. Em particular, $\sup(-A) = -\inf A$, ou ainda, $\sup A = -\inf(-A)$.

Sugestões e soluções

1. Raciocine por absurdo. Veja bem, a negativa da primeira proposição dada é: existem um $e \in E$ e um $x < e$ tal que $x \notin E$, donde $x \in D$. Confronte isso com a definição de corte para encontrar o absurdo.
2. Tem-se de provar que, dado $e \in E$, existe $e' \in E$, $e' > e$. Para isso, seja $\varepsilon > 0$ um número racional tal que $\varepsilon < r - e$. Então, $e' = e + \varepsilon < e + (r - e) = r$; logo, $e' \in E$ e $e' > e$. Demonstre a segunda parte.
5. Sejam α e β os números reais dados, com $\alpha < \beta$. Se α for racional, os infinitos números $\alpha + \sqrt{2}/n$, $\alpha + \sqrt{2}/(n+1)$, $\alpha + \sqrt{2}/(n+2)$, $\alpha + \sqrt{2}/(n+3)$, ... são todos irracionais; e estarão todos entre α e β, desde que n seja suficientemente grande; por exemplo, basta que $\alpha + \sqrt{2}/n$ seja menor do que β, ou seja, $n > \sqrt{2}/(\beta - \alpha)$. O leitor termine fazendo o caso em que α for irracional.

   Faça outro raciocínio, servindo-se do resultado do exercício anterior.
7. Seja d o elemento de separação no corte (E, D). d é o menor elemento de D. Sejam $E' = D \cup \{d\}$ e $D' = D - \{d\}$. Prove que $-\alpha = (-D', -E')$ é realmente um corte, e que satisfaz a condição desejada. Lembre-se de que $0 = (A, B)$, onde A é o conjunto dos números racionais negativos e B é o conjunto dos números racionais ≥ 0.

8. Observe que a negação de "x é menor que algum elemento de C" é "x é maior ou igual a todo elemento de C".

9. $N > (1-\varepsilon)/\varepsilon$.

10. Seja A um conjunto limitado inferiormente e seja B o conjunto de todas as cotas inferiores de A. É claro que B não é vazio e é limitado superiormente por qualquer elemento de A, de forma que B tem supremo; além disso, sendo s esse supremo, todo número menor do que s pertence a B. Vamos provar que s é o ínfimo de A. Observe que a) $s \leq a$ para todo $a \in A$, pois qualquer número menor do que s está em B. Ademais, b) dado $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $a < s + \varepsilon$, senão todo número menor do que $S + \varepsilon$ estaria em B e s não seria o supremo de B.

11. $a > 1 \Rightarrow a^2 > a$, logo $a^2 > a > 1$. Isso, por sua vez, implica $a^3 > a^2 > a$. Assim prosseguimos até chegarmos a $a^n > a^{n-1} > \ldots > a$.

12. Observe que $b = 1/a > 1$.

13. Considere o conjunto C dos números $c \geq 0$ tais que $c^2 < 2$. Trata-se de um conjunto não vazio, pois contém o número 1. Vemos também que C é limitado superiormente (pelo número 2, por exemplo). Designando por b seu supremo, vamos provar que $b^2 = 2$. Para isso, mostremos primeiro que é absurdo ser $b^2 < 2$. De fato, nesta hipótese, seja ε um número positivo menor do que 1, de sorte que

$$(b+\varepsilon)^2 = b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon^2 = b^2 + \varepsilon(2b+\varepsilon) < b^2 + (2b+1)\varepsilon.$$

Determine ε fazendo este último número menor do que 2 e termine a demonstração. Se necessário, estude a demonstração do exercício seguinte e volte a este.

14. Supomos, evidentemente, que $n > 1$. Devemos provar que existe um número $b > 0$ tal que $b^n = a$. Para isso consideramos o conjunto C dos números $c \geq 0$ tais que $c^n < a$. Trata-se de um conjunto não vazio, pois contém o número 1 se $a > 1$ e, de acordo com o Exerc. 12, contém o número a se $a < 1$. Vemos também que C é limitado superiormente, pelo número 1 se $a < 1$ e pelo próprio a se $a > 1$. Designando por b seu supremo, vamos provar que $b^n = a$. Para isso, mostremos primeiro que é absurdo ser $b^n < a$. De fato, nesta hipótese, seja ε um número positivo menor do que 1, de sorte que

$$\begin{aligned}(b+\varepsilon)^n &= b^n + nb^{n-1}\varepsilon + \ldots + \varepsilon^n \\ &= b^n + \varepsilon\Big[nb^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}b^{n-2}\varepsilon + \ldots + \varepsilon^{n-1}\Big] \\ &< b^n + \varepsilon\Big[nb^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}b^{n-2} + \ldots + 1\Big] = b^n + K\varepsilon,\end{aligned}$$

onde K é a expressão entre colchetes, que independe de ε. Ora, fazendo $\varepsilon < (a - b^n)/K$, teríamos $b^n < (b+\varepsilon)^n < a$, absurdo, pois então b não seria o supremo do conjunto C. Mostremos agora que é absurdo ser $b^n > a$. Isso implica $(1/b)^n < 1/a$. Então, com raciocínio análogo ao que acabamos de fazer, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\Big(\frac{1}{b}\Big)^n < \Big(\frac{1}{b} + \varepsilon\Big)^n < \frac{1}{a},$$

donde obtemos

$$b^n > \Big(\frac{b}{1+b\varepsilon}\Big)^n > a.$$

Ora, isso também contradiz o fato de b ser o supremo do conjunto C, de forma que devemos concluir que $b^n = a$, como desejávamos.

15. Faça um desenho para ajudar no raciocínio. Como $A \subset B$, todo elemento de A é maior ou igual a algum elemento de B e menor ou igual a algum outro elemento de B.

16. Raciocine por absurdo: se $\inf B < \sup A$, pela definição do supremo teria de haver algum elemento de A maior do que $\inf B$; e pela definição do ínfimo, esse elemento de A seria maior do que algum elemento de B. Você está fazendo um desenho para ajudar no raciocínio?

17. Como $r \leq a + b$ para todo $a \in A$ (e b fixo), devemos ter $r \leq \inf A + b$ (se não...); e como isto é verdade para todo $b \in B$, devemos ter também $r \leq \inf A + \inf B$.

Desigualdade do triângulo

O leitor certamente conhece a definição de *valor absoluto* de um número r, indicado pelo símbolo $|r|$, e que é igual a r se $r \geq 0$ e a $-r$ se $r < 0$. Muito importante em nosso estudo é a chamada *desigualdade do triângulo*, segundo a qual,

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \tag{1.7}$$

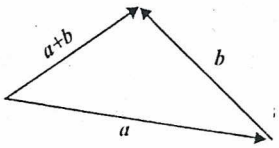
quaisquer que sejam os números a e b. Para demonstrá-la observamos que

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = |a|^2 + |b|^2 + 2ab \\ &\leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| = (|a| + |b|)^2. \end{aligned}$$

Agora é só extrair a raiz quadrada para obtermos o resultado desejado.

A desigualdade (1.7) pode também ser estabelecida por verificação direta, considerando as várias hipóteses: 1) $a \geq 0$ e $b \geq 0$; 2) $a \leq 0$ e $b \leq 0$; 3) $a \geq 0 > b$ e $a \geq |b|$ etc. Deixamos ao leitor a tarefa de verificar que em (1.7) vale o sinal de igualdade se e somente se a e b tiverem o mesmo sinal.

Fig. 1.10



1.9. Observação. A desigualdade (1.7) é chamada "'desigualdade do triângulo" porque ela é válida também quando a e b são vetores, digamos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Neste caso, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ são os três lados de um triângulo (Fig. 1.10) e a desigualdade traduz a propriedade geométrica bem conhecida: *em um triângulo qualquer lado é menor do que a soma dos outros dois*, isto é, se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ não são colineares e nenhum deles é o vetor nulo, então

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

Deixamos ao leitor a tarefa de demonstrar, como exercícios, as outras desigualdades seguintes:

$$|a-b| \leq |a| + |b|; \quad |a| - |b| \leq |a \pm b| \tag{1.8}$$

$$|b| - |a| \leq |a \pm b|; \quad \big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b| \tag{1.9}$$

Uma importante propriedade dos números naturais é o princípio que enunciamos a seguir.

Exercícios

1. Prove as quatro desigualdades em (1.8) e (1.9).
2. Prove que se a desigualdade $|a| - |b| \leq |a - b|$ é válida quaisquer que sejam a e b. o mesmo é verdade de $|a + b| \leq |a| + |b|$.
3. Prove por indução que $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$, quaisquer que sejam os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
4. Prove que $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \geq |a_1| - |a_2| - \ldots - |a_n|$, quaisquer que sejam os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Sugestões e soluções

1. A primeira desigualdade em (1.5) é conseqüência de (1.7) com $-b$ em lugar de b. Quanto à segunda com sinal negativo, observe, por (1.7), que

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|.$$

Trocando b por $-b$ obtemos a desigualdade com sinal positivo. A primeira desigualdade em (1.9) segue da segunda de (1.8) com a troca de a com b. Finalmente, a segunda desigualdade em (1.9) segue das duas últimas mencionadas; basta observar que

$$x < r \text{ e } -x < r \Leftrightarrow |x| < r.$$

2. Faça $a - b = c$ e observe que se a e b são arbitrários, o mesmo é verdade de b e c.
4. Observe que

$$\begin{aligned} |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| &= |a_1 + (a_2 + \ldots + a_n)| \\ &\geq |a_1| - |a_2 + \ldots + a_n| \geq |a_1| - (|a_2| + \ldots |a_n|) \\ &= |a_1| - |a_2| - \ldots - |a_n|. \end{aligned}$$

Notas históricas e complementares

Os Elementos de Euclides

Temos muito pouca informação sobre Euclides, que teria vivido por volta do ano 300 a.C. E esse pouco que dele sabemos nos vem dos comentários de Proclus (410–485), um autor que viveu mais de 700 anos depois de Euclides. Mesmo Proclus tem dificuldade em determinar a

época em que viveu Euclides.

Euclides escreveu várias obras científicas, a mais famosa das quais, conhecida com o nome de "Elementos", é uma coletânea de 13 livros, reunindo quase todo o conhecimento matemático da época em que foi escrita. Em parte por causa disto, e também por tratar-se de uma obra de escol, que reunia a maior parte da Matemática então conhecida, as obras anteriores aos Elementos desapareceram. A única exceção são alguns fragmentos atribuídos a Hipócrates de Quio, que viveu no século V a.C. Assim, os Elementos de Euclides são praticamente tudo o que temos da Matemática grega que se desenvolveu desde seu início com Tales de Mileto, que viveu no século VI a.C., até o tempo de Euclides. Trata-se de um período de cerca de 250 anos, aliás, muito pouco tempo para que a Matemática, logicamente organizada, evoluísse do estágio embrionário em que se encontrava com Tales, até o alto grau de sofisticação que transparece nos Elementos.

Não sabemos se Euclides escreveu os Elementos para uso no ensino, ou apenas para reunir o conhecimento matemático da época. Naquele tempo não havia a preocupação pedagógica dos dias de hoje, de sorte que Euclides alcançou os dois objetivos. E os Elementos foram muito usados no aprendizado da Matemática por mais de dois milênios. No século XIX já havia outros livros de Geometria, didaticamente mais adequados ao ensino, notadamente o livro de Legendre, que teve muitas edições em várias línguas, inclusive o português. Esse livro foi muito usado nas escolas brasileiras por quase todo o século XIX. (Veja nosso artigo "Legendre e o postulado das paralelas" na RPM 22.)

Um equívoco que se comete com freqüência é pensar que os Elementos são uma obra apenas sobre Geometria. Na verdade, há muito de Aritmética e Álgebra em vários dos livros dos Elementos. O que é verdade — e isto explica, pelo menos em parte, a origem do equívoco — é que a Matemática grega na época em que Euclides compôs sua obra, era toda ela geometrizada. De fato, como vimos atrás, a crise dos incomensuráveis e a genial solução que lhe deu Eudoxo, aliada a uma excessiva preocupação com o rigor, encaminhou toda a Matemática para o lado da Geometria. Isso se tornou tão arraigado que até o início do século XIX os matemáticos costumavam ser chamados de "geômetras". Era comum, por exemplo, referir-se a um matemático como Henri Poincaré (1854–1912) como "o grande geômetra francês", embora ele fosse um homem de cultura universal, em Matemática, Física, Filosofia e outros domínios do conhecimento. Ainda hoje certos professores de Matemática de universidades inglesas têm o título de "Professor of Geometry".

Um outro equívoco não menos freqüente é pensar que os fatos geométricos dos Elementos de Euclides sejam expressos numericamente como o são para nós hoje. Para exemplificar, enquanto para nós a área de um triângulo é dada por uma fórmula exprimindo metade do produto da base pela altura, para Euclides a área de um triângulo é metade da área do paralelogramo que se obtém com a junção de dois triângulos iguais ao triângulo dado; a área do paralelogramo é igual à área de um retângulo de mesma base e mesma altura, e assim por diante. Para nós, hoje, a área de um círculo é πr^2, mas para Arquimedes (287–212 a.C.), que viveu algumas décadas depois de Euclides, a área do círculo é igual à área de um triângulo de base igual ao comprimento da circunferência e altura igual ao raio do círculo. Para nós o volume da esfera é $4\pi r^3/3$, enquanto o que Arquimedes nos diz é que o volume da esfera está para o volume do cilindro circular reto a ela circunscrito assim como 2 está para 3; e isto é informação suficiente. Na Matemática grega, antes e durante o período helenístico, não havia fórmulas como é tão comum hoje em dia; tudo era dado em termos de proporções, como no caso do volume da esfera que acabamos de mencionar. E isso perdurou no Ocidente por mais um milênio após o declíneo da civilização helenística.

O conteúdo dos Elementos

Os Elementos, para nós hoje, são uma obra antes de tudo de valor histórico. Sua melhor versão

é a tradução inglesa de Thomas L. Heath (publicada pela Editora Dover em três volumes). Isto porque Heath enriqueceu sobremaneira a obra de Euclides com uma excelente introdução, além de inúmeros, valiosos e esclarecedores comentários.

O volume I reúne os Livros I e II dos Elementos, o primeiro destes contendo uma boa parte da geometria plana, construções geométricas, teoremas de congruência, áreas de polígonos e o teorema de Pitágoras (que é a Proposição 47). Ainda no volume I de Heath encontra-se o Livro II dos Elementos, sobre o que se costuma chamar de "Álgebra geométrica". Por exemplo, a Proposição 4 desse Livro II é o equivalente, em linguagem geométrica, da propriedade que hoje conhecemos como "quadrado da soma" (igual ao quadrado do primeiro, mais o quadrado do segundo, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo). Euclides enuncia isto geometricamente assim: "se um segmento de reta é dividido em dois, o quadrado construído sobre o segmento inteiro é igual aos quadrados sobre os segmentos parciais e duas vezes o retângulo construído com estes segmentos". Euclides não fala, mas ele está se referindo a áreas, quando diz "...é igual..."

O volume II de Heath contém os Livros III a IX dos Elementos, tratando do círculo (Livro III), construção de certos polígonos regulares (Livro IV), teoria das proporções de Eudoxo (Livro V), Semelhança de figuras (Livro VI) e teoria dos nmeros (Livros VII-IX). Por exemplo, a Proposição 20 do Livro IX é o famoso teorema: "existem infinitos números primos". Mas Euclides não fala "infinitos", já que os gregos não admitiam o que Aristóteles chama de "infinito atual", apenas o chamado "infinito potencial". Em linguagem de hoje ele diz o seguinte: "Dado qualquer conjunto (finito, entenda-se bem!) de números primos, existe algum número primo fora desse conjunto". E a demonstração, novamente, é geométrica. Segundo o matemático inglês Godfrey Harold Hardy (1877-1947), trata-se de uma das mais belas demonstrações da Matemática.

Finalmente, o volume III de Heath contém os Livros X-XIII, onde são tratados a incomensurabilidade, geometria espacial e os poliedros regulares.

O leitor pode ler mais sobre os Elementos no excelente trabalho do Prof. João Bosco Pitombeira sobre essa obra, publicado como volume 5 dos Cadernos da RPM; ou no livro de Asgar Aaboe, intitulado "Episódios da História Antiga da Matemática", traduzido e publicado pela SBM.

A Geometria dedutiva

Foi no século VI a.C. que Tales de Mileto inaugurou na Matemática a preocupação demonstrativa. A partir de então a Matemática grega vai assumindo o aspecto de um corpo de proposições logicamente ordenadas: cada proposição é demonstrada a partir de proposições anteriores, estas a partir de outras precedentes, e assim por diante, um processo que não teria fim. Mas os gregos logo perceberam isso e viram que era necessário parar o processo em certas proposições iniciais, consideradas evidentes por si mesmas; a partir destas todas as outras são demonstradas. As proposições evidentes por si mesmas, são hoje designadas, indiferentemente, "postulados" ou "axiomas". O aspecto mais importante dos Elementos é essa organização dos fatos, num admirável encadeamento lógico-dedutivo em que um reduzido número de proposições e definições iniciais são o bastante para se demonstrar, uns após outros, todos os teoremas considerados. Historicamente, os Elementos são a primeira corporificação desse "método axiomático", de que voltaremos a falar mais adiante.

As geometrias não-euclidianas

Embora muito admirado e aplaudido, o modêlo axiomático dos Elementos, no que se refere ao 5º postulado, ou postulado das paralelas, suscitou questionamentos. Já na antigüidade vários matemáticos acreditavam que ele pudesse ser demonstrado com base nos outros postulados, e

tentaram fazer tal demonstração. Essas tentativas de demonstração foram retomadas nos tempos modernos pelo matemático italiano Girolamo Saccheri (1667–1733), que publicou, pouco antes de morrer, um opúsculo no qual pretendia ter demonstrado o postulado pelo método de redução ao absurdo. Assim, negando o postulado, ele demonstrou uma série de teoremas, concluindo ter chegado a uma contradição. Mas, no fundo, no fundo, não havia contradição nas conclusões de Saccheri, embora isso só fosse notado muito mais tarde, quando Eugênio Beltrami (1835–1900) descobriu o trabalho de Saccheri.

Por volta de 1830 já havia sérias suspeitas de que o postulado das paralelas não pudesse ser demonstrado a partir dos outros. Em outras palavras, suspeitava-se que se pudesse desenvolver uma geometria a partir de negações do postulado das paralelas, ao lado dos outros postulados de Euclides. Foi nessa época que o matemático húngaro János Bolyai (1802–1860) e o russo Nicokolai Ivanovich Lobachevsky (1792–1856) publicaram, independentemente um do outro, a descoberta de geometrias não-euclidianas, ou seja, geometrias que negam o postulado das paralelas.[6]

Mas as publicações de Bolyai e Lobachevski não foram suficientes para convencer o mundo matemático da possibilidade das geometrias não-euclidianas. Na verdade, esses trabalhos eram parecidos com o de Saccheri: negavam o postulado das paralelas e desenvolviam uma série de teoremas sem chegar a contradição alguma. Mas, e daí? quem garante que a contradição não está para aparecer logo no próximo teorema que ainda não foi demonstrado? Quem garante que todos os teoremas já foram enunciados e demonstrados?

Aliás, foi somente após essas questões serem levantadas em conexão com as tentativas de demonstrar o postulado das paralelas, ou construir geometrias não-euclidianas, que os matemáticos começaram a perceber que a própria Geometria de Euclides também estava sujeita aos mesmos questionamentos. Quem poderia garantir que os cinco postulados de Euclides não poderiam levar a uma contradição? Afinal, Euclides demonstrara apenas um número finito de teoremas. Quem sabe a contradição poderia aparecer no próximo teorema, como alguém que, depois de tanto percorrer as areias de um deserto à procura de um oasis, quando não mais acredita que ele exista, pode — agora por felicidade e não desdita — encontrá-lo do outro lado da próxima duna!...

Foi Beltrami quem primeiro exibiu um modelo de geometria não-euclidiana que permitia interpretar os fatos dessa geometria em termos da própria geometria euclidiana. Outros modelos foram construídos por Felix Klein (1849– 1925) e Henri Poincaré, estes também, como o de Beltrami, apoiando-se na geometria euclidiana.

Foi a partir de então — após esses vários matemáticos haverem exibido modelos euclidianos das geometrias não-euclidianas —, que estas geometrias ganharam total credibilidade.[7] Provava-se que elas eram consistentes, isto é, livres de contradições internas. Mas tais provas apoiavam-se na geometria euclidiana, de sorte que elas tornavam ao mesmo tempo evidente a necessidade de provar a consistência da própria Geometria de Euclides. Os matemáticos começaram então a estudar a consistência dos postulados de Euclides, e logo perceberam que eles eram insuficientes para provar os teoremas conhecidos, sem falar nos demais que viessem a ser considerados no futuro. Analisando os Elementos desse novo ponto de vista, eles desco-

[6]Quando jovem, o pai de Bolyai havia sido colega de Gauss em Göttingen. E quando o filho pôs suas idéias por escrito, ele (o pai) enviou um exemplar do manuscrito a Gauss. Mas este, pouco sensível ao entusiasmo do jovem János, escreveu de volta dizendo mais ou menos o seguinte: "sim, mas isso que seu filho fez não é novidade para mim, que percebi essa possibilidade há muitos anos, em minha juventude". Tudo indica que Gauss foi mesmo o primeiro matemático a perceber a possibilidade das geometrias não-euclidianas.

[7]Estamos deixando de lado uma outra vertente importantíssima no desenvolvimento das geometrias não-euclidianas, devida a Riemann, mas que não é necessária no momento.

briram que a axiomática euclidiana era muito incompleta e continha sérias falhas. Euclides, em suas demonstrações, apelava para muitos fatos alheios aos postulados. Era necessário reorganizar a própria geometria euclidiana, suprindo, inclusive, os postulados que estavam faltando. Isto foi feito por vários matemáticos no final do século XIX, dentre eles David Hilbert (1862–1943) que, em 1889 publicou o livro "Fundamentos da Geometria", no qual ele faz uma apresentação rigorosa de uma axiomática adequada ao desenvolvimento lógico-dedutivo da geometria euclidiana.

Paralelamente ao que acontecia em Geometria, as preocupações com o rigor se faziam presentes também na Análise Matemática a partir de aproximadamente 1815, e sobre isso falaremos nas notas do final do Capítulo 4.

Os Fundamentos da Matemática

Os desenvolvimentos que vinham ocorrendo na Geometria, na Álgebra e na Análise durante todo o século XIX convergiram, no final do século, para uma preocupação com os fundamentos de toda a Matemática. Por duas razões importantes os matemáticos acabaram se convencendo de que todas as teorias matemáticas teriam de se fundamentar, em última instância, nos números naturais. De um lado, os números complexos, os números reais, os racionais e os inteiros puderam ser construídos, de maneira lógica e consistente, uns após outros, terminando nos números naturais. De outro lado, Hilbert estabelecera uma correspondência entre os elementos geométricos do plano — pontos e retas e círculos — com os entes numéricos da geometria analítica. Os pontos podem ser caracterizados por pares ordenados de números reais, e as retas e círculos por suas equações. Isto permitiu transferir o problema da consistência da Geometria à consistência da Aritmética. Provando-se a consistência desta, ficaria também provada a consistência da Geometria. Assim, a Geometria, que desde a antigüidade era considerada o modelo de rigor lógico, estava agora dependendo da própria Aritmética para sua efetiva fundamentação.

Leopold Kronecker (1823–1891) dizia que Deus nos deu os números naturais e que o resto é obra do homem. Com isto ele queria dizer que esses números deveriam ser tomados como o ponto de partida, o fundamento último de toda a Matemática. Não obstante isso, Richard Dedekind mostrou ser possível construir os números naturais a partir da noção de conjunto, noção esta que seria mais extensamente desenvolvida por Georg Cantor (1845- 1918).[8]

A possibilidade de construir toda a Matemática a partir da teoria dos conjuntos intensificou o interesse por esse campo de estudos. Porém, esses estudos estavam ainda incipientes e os matemáticos já começavam a encontrar sérias contradições internas na teoria.[9] Muitas dessas contradições foram resolvidas, até que, em 1931 o lógico austríaco Kurt Gödel (1906–1978) surpreendeu o mundo matemático com a publicação de um trabalho em que demonstrava que o método axiomático tem inevitáveis limitações, que impedem mesmo a possibilidade de construir um sistema axiomático abrangendo a Aritmética.

Para entender melhor o que isso significa, devemos lembrar que um sistema axiomático deve satisfazer às três condições seguintes: ser consistente, quer dizer, os postulados não podem contradizer uns aos outros, por si mesmos ou por suas conseqüências; deve ser completo, no sentido de serem suficientes para provar verdadeiras ou falsas todas as proposições formuladas no contexto da teoria em questão; e, por fim, cada postulado deve ser independente dos demais, no sentido de que não é conseqüência deles, sob pena de ser supérfluo. Pois bem, Gödel prova, dentre outras coisas, que a consistência de qualquer sistema matemático que englobe a Aritmética não pode ser estabelecido pelos princípios lógicos usuais. Isto ele prova como

[8] O matemático italiano Giuseppe Peano (1858–1932) mostrou como construir esses números a partir de noções primitivas e postulados.

[9] A propósito, veja o artigo que publicamos na RPM 43.

conseqüência deste seu outro resultado, conhecido como o teorema da incompletude: se uma teoria formal abrangendo a Aritmética for consistente, ela necessariamente será incompleta, o que significa dizer que haverá alguma proposição sobre os inteiros que a teoria será incapaz de decidir ser verdadeira ou falsa.

Seria errôneo pensar que os estudos de Fundamentos terminam com os resultados de Gödel, ou que esses resultado, pelos seus aspectos negativos, condenam a Matemática a uma posição inferior no contexto do conhecimento humano. O resultado de Gödel certamente mostra que é falsa a expectativa acalentada desde a antigüidade de que o conhecimento matemático, com seu caráter de certeza absoluta, possa ser ciscunscrito nos limites permitidos por um sistema axiomático. Além de revelar as limitações do método axiomático, os resultados de Gödel mostram, isto sim, que as verdades matemáticas, na sua totalidade, escapam aos figurinos formais dos sistemas axiomáticos.

Hermann Weyl (1885–1955), que está entre os maiores matemáticos do século XX, disse, espirituosamente: Deus existe porque certamente a Matemática é consistente; e o demônio existe porque somos incapazes de provar essa consistência.

Definição de corpo

O leitor encontrará, em livros sobre estruturas algébricas exposições sobre a teoria de corpos. Daremos aqui apenas a definição de corpo, sem entrar em maiores detalhes.

Um corpo (comutativo) é um conjunto não vazio C, munido de duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação*, cada uma delas fazendo corresponder um elemento de C a cada par de elementos de C, as duas operações estando sujeitas aos *axiomas de corpo* listados a seguir. A soma de x e y de C é é indicada por $x + y$ e a multiplicação de x e y é indicada por xy. Os axiomas de corpo são:

1. (Associatividade) Dados quaisquer $x, y, z \in C$,

$$(x + y) + z = x + (y + z) \text{ e } (xy)z = x(yz);$$

2. (Comutatividade) Quaisquer que sejam $x, y \in C$,

$$x + y = y + x \text{ e } xy = yx;$$

3. (Distributividade da multiplicação em relação à adição) Quaisquer que sejam x, y, $z \in C$, $x(y + z) = xy + xz$;

4. (Existência do zero) Existe um elemento em C, chamado "zero" ou "elemento neutro", indicado pelo símbolo "0", tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in C$.

5. (Existência do elemento oposto) A todo elemento $x \in C$ corresponde um elemento $x' \in C$ tal que $x + x' = 0$. (Esse elemento x', que se demonstra ser único para cada x, é indicado por $-x$.)

6. (Existência do elemento unidade) Existe um elemento em C, designado "elemento unidade" e indicado com o símbolo "1", tal que $1x = x$ para todo $x \in C$.

7. (Existência do elemento inverso) A todo elemento $x \in C$, $x \neq 0$, corresponde um elemento $x" \in C$ tal que $xx" = 1$. Esse elemento $x"$, que se demonstra ser único para cada x, é indicado com x^{-1} ou $1/x$.

O corpo se diz *ordenado* se nele existe um subconjunto P, chamado o *conjunto dos elementos positivos*, tal que: a) a soma e o produto de elementos positivos resulta em elementos positivos; b) dado $x \in C$, ou $x \in P$, ou $x = 0$, ou $-x \in P$.

Capítulo 2

SEQÜÊNCIAS INFINITAS

Intervalos

Antes de entrarmos propriamente no assunto deste capítulo, vamos rever algumas definições sobre *intervalos numéricos*, que serão usadas neste e nos capítulos seguintes.

Dados dois números a e b, com $a < b$, chama-se *intervalo aberto* de extremos a e b, denotado por (a, b), ao conjunto

$$(a, b) = \{x \in R: a < x < b\}.$$

Se incluirmos os extremos a e b no intervalo, então ele será denominado *intervalo fechado* e indicado com o símbolo $[a, b]$:

$$[a, b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}.$$

O intervalo pode também ser *semifechado* ou *semi-aberto*, como nos exemplos seguintes:

$$[-3, 1) = \{x \in R: -3 \leq x < 1\}; \quad (3, 5] = \{x \in R: 3 < x \leq 5\}.$$

Introduzindo os símbolos $-\infty$ e $+\infty$, podemos considerar todo o eixo real como um intervalo:

$$(-\infty, +\infty) = \{x: -\infty < x < +\infty\}.$$

Adotamos notação análoga para semi-eixos fechados ou abertos na extremidade finita, como

$$[7, +\infty) = \{x: 7 \leq x < +\infty\}; \quad (-\infty, 3) = \{x: -\infty < x < 3\}.$$

Sempre que nos referirmos aos intervalos (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$ ou $[a, b)$, a e b serão números finitos, com $a < b$.

Seqüências infinitas

Uma *seqüência numérica* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ é uma função f, definida no conjunto dos números naturais $\mathbf{N}$: $f: n \mapsto f(n) = a_n$. O número n que aí aparece é chamado o *índice* e a_n o *n-ésimo* elemento da seqüência, ou *termo geral*. Um

exemplo de seqüência é dado pela seqüência dos números pares positivos, $a_n = 2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ A seqüência dos números ímpares positivos também tem uma fórmula simples para o termo geral, que é $a_n = 2n - 1$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$; ou $a_n = 2n + 1$, com $n \geq 0$.

Mas nem sempre o termo geral de uma seqüência é dado por uma fórmula, embora, evidentemente, sempre haja uma lei de formação bem definida que permite determinar o termo geral da seqüência. É esse o caso das aproximações decimais por falta de $\sqrt{2}$, que formam a seqüência infinita

$$a_1 = 1,4, \quad a_2 = 1,41, \quad a_3 = 1,414, \quad a_4 = 1,4142,$$

$$a_5 = 1,41421, \quad a_6 = 1,414213, \ldots$$

Outro exemplo é a seqüência dos números primos,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, \ldots;$$

Como é bem sabido, não existe fórmula para seu termo geral, mas todos os termos estão determinados.

A notação (a_n) é muito usada para designar uma seqüência. Também se escreve $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ ou simplesmente a_n. Alguns autores costumam escrever $\{a_n\}$ em vez de (a_n), mas preferimos reservar essa notação para o *conjunto de valores* da seqüência. Essa distinção é importante, pois uma seqüência possui infinitos elementos, mesmo que seu conjunto de valores seja finito. Por exemplo, a seqüência

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

é infinita, com elemento genérico $a_n = -(-1)^n = (-1)^{n-1}$; mas seu conjunto de valores possui apenas dois elementos, $+1$ e -1, de forma que, segundo convencionamos,

$$\{a_n\} = \{-1, +1\}.$$

Pela definição, uma seqüência (a_n) é indexada a partir de $n = 1$, de forma que a_1 é seu primeiro termo. Mas, às vezes, é conveniente considerar seqüências indexadas a partir de um certo $n \neq 1$; é esse o caso da seqüência $a_n = \sqrt{n-6}$, que só faz sentido para $n = 6, 7, 8, \ldots$, de forma que a_6 é o primeiro termo dessa seqüência. Mas, mesmo nesses casos, com uma *translação de índices*, pode-se fazer com que a seqüência tenha primeiro índice $n = 1$. Assim, no exemplo que demos, é só definir $b_n = a_{n+5} = \sqrt{n-1}$ para que a seqüência fique definida a partir de $n = 1$.

Conceito de limite e primeiras propriedades

De interesse especial são as chamadas *seqüências convergentes*. Em termos sugestivos, uma seqüência (a_n) é convergente se, à medida que o índice n cresce, o elemento a_n vai- se tornando arbitrariamente próximo de um certo número L, chamado o *limite* da seqüência. A proximidade entre a_n e L é medida pelo valor absoluto da diferença entre esses dois números, isto é, por $|a_n - L|$. Portanto, dizer que a_n vai-se tornando arbitrariamente próximo de L significa dizer que $|a_n - L|$ torna-se inferior a qualquer número positivo ε, por pequeno que seja, desde que façamos o índice n suficientemente grande. Daí a definição precisa de convergência que damos a seguir.

2.1. Definição. *Diz-se que uma seqüência (a_n) converge para o número L, ou tem limite L se, dado qualquer número $\varepsilon > 0$, é sempre possível encontrar um número N tal que*

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Escreve-se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim a_n = L$ ou $a_n \to L$. Uma seqüência que não converge é dita *divergente*. Chama-se *seqüência nula* toda seqüência que converge para zero.

Essa definição requer várias observações. Ao dizermos "dado qualquer $\varepsilon > 0$", está implícito que ε pode ser arbitrariamente pequeno, ou seja, tão pequeno quanto quisermos. E a condição (2.1), uma vez satisfeita para um certo $\varepsilon = \varepsilon_0$, estará satisfeita com qualquer $\varepsilon > \varepsilon_0$; portanto, basta prová-la para todo ε positivo, menor do que um certo ε_0, como muitas vezes se faz, para que ela fique provada para qualquer $\varepsilon > 0$. Quanto ao número N, podemos supô-lo inteiro positivo, portanto, um índice da seqüência; pois se não for assim, é claro que ele pode ser substituido por qualquer inteiro maior. Mas fique claro também que N pode não precisa ser inteiro, como veremos nos exemplos adiante.

O primeiro sinal de desigualdade em (2.1) tanto pode ser $>$ como $\geq$, do mesmo modo que o segundo tanto pode ser $<$ como $\leq$. De fato, se existe um inteiro positivo N' tal que $n \geq N' \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$, então, é claro que (2.1) vale com $N = N' - 1$. E se é possível fazer $|a_n - L| \leq \varepsilon$ com qualquer $\varepsilon > 0$, certamente é possível fazer $|a_n - L| \leq \varepsilon/2$, portanto, $|a_n - L| < \varepsilon$.

Observe também que tanto faz fazer $|a_n - L| < \varepsilon$ ou $|a_n - L| < k\varepsilon$, onde k é uma constante positiva, pois se é possível fazer $|a_n - L| < k\varepsilon$ com qualquer $\varepsilon > 0$, certamente é possível fazer $|a_n - L| < k(\varepsilon/k) = \varepsilon$.

Se suprimirmos de uma seqüência (a_n) um número finito de seus termos, em particular, se eliminarmos seus k primeiros termos, isso em nada altera o caráter da seqüência com $n \to \infty$. Assim, se a seqüência original converge para L, ou

diverge, a nova seqüência convergirá para L ou divergirá, respectivamente.

Definição de vizinhança

Dado um número L qualquer, chama-se *vizinhança* ε de L a todos os números x do intervalo $(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$. Denotaremos esse intervalo com o símbolo $V_\varepsilon(L)$. Observe que a condição $x \in V_\varepsilon(L)$ pode ser escrita das seguintes três maneiras equivalentes:

$$|x-L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x-L < \varepsilon \Leftrightarrow L-\varepsilon < x < L+\varepsilon.$$

Assim, ao definirmos limite, estamos dizendo que $n > N \Rightarrow a_n \in V_\varepsilon(L)$, ou seja,

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon, \quad \text{ou} \quad n > N \Rightarrow L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon,$$

ou ainda, $n > N \Rightarrow L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$.

É importante observar também, na definição de limite, que uma vez dado o número ε, esse número permanece fixo; a determinaçãoo de N depende do ε particular que se considere, de sorte que, mudando-se ε, deve-se, em geral, mudar também o número N. Em outras palavras, ε pode ser dado arbitrariamente, mas, uma vez prescrito, não pode ser mudado até a determinação de N. Isso está ilustrado no exemplo que consideramos a seguir.

2.2. Exemplo. Vamos provar, segundo a Definição 2.1, que a seqüência

$$(a_n) = \left(\frac{n}{n+12}\right) = \left(\frac{1}{13}, \frac{2}{14}, \frac{3}{15}, \ldots, \frac{n}{n+12}, \ldots\right)$$

converge para o número 1. Para isso observamos que, dado qualquer $\varepsilon > 0$,

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+12} - 1\right| = \frac{12}{n+12} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{12}{\varepsilon} - 12. \qquad (2.2)$$

Isso quer dizer que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N\ (= 12/\varepsilon - 12)$ tal que

$$n > N \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon,$$

que é precisamente a condição (2.1) exigida na definição de limite.

Esse exemplo mostra que quanto menor o ε tanto mais exigentes estaremos sendo quanto à proximidade entre a_n e o limite 1, exigência essa que se traduz em termos de fazer o índice n cada vez maior. De fato, quanto menor o ε, tanto maior o número $N = 12/\varepsilon - 12$. Assim, se $\varepsilon = 1/10, N = 108$; se $\varepsilon = 1/100, N = 1188$; em geral, se $\varepsilon = 10^{-k}, N = 12 \cdot 10^k - 12$. Isso ilustra o que dissemos antes: a determinação do número N depende do número ε

particular que se considere. Ao contrário, se dermos um ε muito grande, pode até acontecer que não haja qualquer condição no índice n; é o que acontece com $\varepsilon = 2$ no exemplo que estamos considerando, que resulta em $N = -6$.

O raciocínio usado em (2.2) permite escrever:

$$|a_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{12}{\varepsilon} - 12.$$

No entanto, poderíamos também ter racionado assim:

$$|a_n - 1| = \frac{12}{n+12} < \frac{12}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{12}{\varepsilon}. \tag{2.3}$$

Mas então a equivalência indicada é apenas entre as duas últimas desigualdades, não sendo mais verdade que

$$|a_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{12}{\varepsilon}.$$

O correto agora é a implicação (numa só direção)

$$n > \frac{12}{\varepsilon} \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon,$$

que também é suficiente para a comprovação de que 1 é o limite. Perdemos a implicação contrária por causa da primeira desigualdade em (2.3), em consequência do que $12/(n+12) < \varepsilon$ não implica $n > 12/\varepsilon$; pode agora ocorrer $12/(n+12) < \varepsilon$ com $n < 12/\varepsilon$, desde que seja $n > 12/\varepsilon - 12$. Veja: com $\varepsilon = 1/10$, $12/\varepsilon = 120$ e $12/\varepsilon - 12 = 108$.

2.3. Exemplo. Consideremos a seqüência

$$a_n = \frac{3n}{n + \operatorname{sen} 2n}.$$

É fácil ver que seu limite deve ser 3. Para evidenciar isso dividimos o numerador e o denominador por n e notamos que $(\operatorname{sen} 2n)/n \to 0$. Assim,

$$a_n = \frac{3}{1 + (\operatorname{sen} 2n)/n}.$$

O que fizemos foi descobrir o limite; devemos agora demonstrar que 3 é realmente o limite, usando a Definição 2.1. Começamos observando que

$$|a_n - 3| = \frac{3|\operatorname{sen} 2n|}{|n + \operatorname{sen} 2n|} \leq \frac{3}{|n + \operatorname{sen} 2n|} \leq \frac{3}{n - |\operatorname{sen} 2n|} \leq \frac{3}{n-1}, \tag{2.4}$$

as duas últimas desigualdades havendo sido obtidas graças às desigualdades $|n + \operatorname{sen} 2n| \geq n - |\operatorname{sen} 2n| \geq n - 1$. Fazendo agora intervir o número ε, obtemos uma desigualdade fácil de resolver em n:

$$|a_n - 3| \leq \frac{3}{n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1 + \frac{3}{\varepsilon} \tag{2.5}$$

de sorte que

$$n > 1 + 3/\varepsilon \Rightarrow |a_n - 3| < \varepsilon, \tag{2.6}$$

que estabelece o limite desejado.

O leitor deve notar, nas passagens efetuadas em (2.4), que procuramos chegar a uma expressão simples, como $1/(n-1)$, para depois fazer intervir o ε, obtendo então uma desigualdade fácil de resolver, como em (2.4). Não fizéssemos tais simplificações e teríamos de enfrentar a intratável inequação

$$\frac{3|\operatorname{sen} 2n|}{|n + \operatorname{sen} 2n|} < \varepsilon\,.$$

É claro que as transformações feitas só permitem, em (2.6), a implicação no sentido aí indicado, que é suficiente para nossos propósitos.

2.4. Exemplo. É fácil descobrir o limite do quociente de dois polinômios de mesmo grau, dividindo numerador e denominador pela maior potência de n. Assim,

$$a_n = \frac{3n^2 + 4n}{n^2 + n - 4} = \frac{3 + 4/n}{1 + 1/n - 4/n^2}$$

claramente tende a 3, já que $4/n, 1/n$ e $4/n^2$ tendem a zero. Para provar isso diretamente da definição de limite, notamos que, a partir de $n = 2$ (que implica $n^2 + n - 4 > 0$),

$$|a_n - 3| = \frac{n + 12}{n^2 + n - 4} < \frac{n + 12}{n^2 - 4};$$

e a partir de $n = 12, n + 12 \leq 2n$ e $4 < n^2/2$, de sorte que $n^2 - 4 > n^2 - n^2/2 = n^2/2$. Assim,

$$|a_n - 3| < \frac{2n}{n^2/2} = \frac{4}{n} < \varepsilon,$$

desde que n seja maior que o maior dos números, $4/\varepsilon$ e 12, isto é,

$$n > N = \max\{4/\varepsilon, 12\}.$$

Isso conclui a demonstração.

Este último exemplo mostra, em particular, que, com n tendendo a infinito, os termos com maior expoente no numerador e no denominador são dominantes sobre os demais.

Seqüências limitadas

O cálculo de limites pode tornar-se mais e mais complicado, se insistirmos em fazê-lo diretamente da definição de limite. Felizmente, com essa definição podemos estabelecer as propriedades tratadas logo adiante, no Teorema 2.8, as quais permitem simplificar bastante o cálculo de limites. Demonstraremos primeiro dois teoremas de importância fundamental, o primeiro dos quais envolvendo a noção de "seqüência limitada". Diz-se que uma seqüência (a_n) é *limitada à esquerda*, ou *limitada inferiormente*, se existe um número A tal que $A \leq a_n$ para todo n; e *limitada à direita*, ou *limitada superiormente*, se existe um número B tal que $a_n \leq B$ para todo n. Quando a seqüência é limitada à esquerda e à direita ao mesmo tempo, dizemos simplesmente que ela é *limitada*. Como é fácil ver, isso equivale a afirmar que existe um número M tal que $|a_n| \leq M$ para todo n.

2.5. Teorema. *Toda seqüência convergente é limitada.*

Demonstração. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um índice N tal que

$$n > N \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon,$$

Isto nos diz que, a partir do índice $n = N + 1$, a seqüência é limitada: à direita por $L + \varepsilon$ e à esquerda por $L - \varepsilon$. Para englobarmos a seqüência inteira, basta considerar, dentre todos os números

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_N,\ L - \varepsilon,\ L + \varepsilon,$$

aquele que é o menor de todos, digamos, A, e aquele que é o maior de todos, digamos, B; então será verdade, para todo n, que

$$A \leq a_n \leq B,$$

o que completa a demonstração.

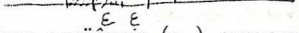
Podíamos também ter atalhado um pouco, como é costume, procedendo assim: seja

$$M = \max\{|a_1|,\ |a_2|, \ldots,\ |a_N|,\ |L - \varepsilon|,\ |L + \varepsilon|\}.$$

Então $|a_n| \leq M$ para todo n, o que prova que a seqüência é limitada.

2.6. Teorema. *Se uma seqüência (a_n) converge para um limite L, e se $A < L < B$, então, a partir de um certo índice N, $A < a_n < B$.*

Demonstração. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que, a partir desse índice, $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$. Portanto, é apenas uma questão de prescrever, de início, ε menor que o menor dos números $L - A$ e $B - L$, para termos $L - \varepsilon > L - (L - A) = A$ e $L + \varepsilon < L + (B - L) = B$. Em conseqüência, $n > N \Rightarrow A < a_n < B$, como queríamos demonstrar.



Corolário 2.7. *Se uma seqüência (a_n) converge para um limite $L \neq 0$, então, a partir de certo índice N, $|a_n| > |L|/2$.*

Para a demonstração, se $L > 0$, tome $A = L/2$. Se $L < 0$, tome $B = L/2$.

O teorema anterior e seu corolário são muito úteis nas aplicações e serão usados repetidamente em nosso estudo, como o leitor deverá notar. Observe que, sempre que tivermos uma seqüência com limite diferente de zero, poderemos encontrar números A e B de mesmo sinal nas condições do teorema. Em geral, nas aplicações, utilizamos apenas uma das desigualdades, ou $A < a_n$ ou $a_n < B$.

Operações com limites

2.8. Teorema. *Sejam (a_n) e (b_n) duas seqüências convergentes, com limites a e b respectivamente. Então, $(a_n + b_n)$, $(a_n b_n)$ e (ka_n), onde k uma constante qualquer, são seqüências convergentes, além do que,*

a) $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b$;

b) $\lim(ka_n) = k(\lim a_n) = ka$; *em particular,* $k = -1$ *nos dá* $a_n \to a \Rightarrow -a_n \to -a$;

c) $\lim(a_n b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n) = ab$;

d) se, além das hipóteses acima, $b \neq 0$, *então existe o limite de* a_n/b_n, *igual a* a/b.

Demonstração. Demonstraremos os dois últimos itens, deixando os dois primeiros, que são mais fáceis, para os exercícios.

Para demonstrar a terceira propriedade, utilizamos a desigualdade do triângulo e o fato de que a seqüência b_n é limitada por uma constante positiva M, de sorte que podemos escrever:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \\ &\leq M|a_n - a| + |a||b_n - b|. \end{aligned}$$

Ora, tanto $|a_n - a|$ como $|b_n - b|$ podem ser feitos arbitrariamente pequenos, desde que n seja suficientemente grande. Assim, dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos fazer

$|a_n - a|$ menor do que $\varepsilon/2M$ a partir de um certo índice N_1 e $|b_n - b| < \varepsilon/2|a|$ a partir de um certo N_2; então, sendo N o maior desses índices, $n > N$ satisfará $n > N_1$ e $n > N_2$ simultaneamente; logo,

$$n > N \Rightarrow |a_n b_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

como queríamos demonstrar.

Observe, nesse raciocínio, que se nos contentássemos em fazer $|a_n - a|$ e $|b_n - b|$ menores do que ε, em vez de $|a_n - a| < \varepsilon/2M$ e $|b_n - b| < \varepsilon/2|a|$, o resultado final seria

$$n > N \Rightarrow |a_n b_n - ab| < (M + |a|)\varepsilon = k\varepsilon$$

Esse procedimento é tão satisfatório quanto o anterior, como já tivemos oportunidade de observar; se quiséssemos terminar com ε, bastaria começar com o número ε/k em vez de ε.

Para a demonstração da quarta propriedade, observamos que o quociente a_n/b_n pode ser interpretado como o produto $a_n(1/b_n)$, de forma que, em vista da propriedade já demonstrada, basta provar que $1/b_n \to 1/b$. Temos:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|}$$

Como $b \neq 0$, a partir de um certo N_1, $|b_n| > |b|/2$; e, dado $\varepsilon > 0$, a partir de um certo N_2, $|b_n - b|$ pode ser feito menor do que $|b|^2\varepsilon/2$, de sorte que, sendo $N = \max\{N_1, N_2\}$, teremos:

$$n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{|b|^2\varepsilon/2}{|b|^2/2} = \varepsilon$$

e isso completa a demonstração.

Em vista deste último teorema, fica fácil lidar com certos limites, como vemos pelo exemplo seguinte:

$$\begin{aligned}\lim \frac{3n^2 + 4n}{5n^2 - 7} &= \lim \frac{3 + 4/n}{5 - 7/n^2} = \frac{\lim(3 + 4/n)}{\lim(5 - 7/n^2)} \\ &= \frac{\lim 3 + \lim(4/n)}{\lim 5 - \lim(7/n^2)} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Terminamos esta seção com dois exemplos importantes de limites.

2.9. Exemplo. Dado um número $a > 0$, $\sqrt[n]{a} \to 1$. Isso é evidente se $a = 1$, quando a seqüência é constantemente igual a 1. Suponhamos $a > 1$,

logo, $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$, onde h_n é um número positivo conveniente. Utilizando a desigualdade de Bernoulli, teremos:

$$a = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n > nh_n.$$

Assim, $h_n = |\sqrt[n]{a} - 1| < a/n$ e isso será menor do que qualquer $\varepsilon > 0$ fixado de antemão, desde que $n > a/\varepsilon$.

No caso $0 < a < 1$, temos que $1/a > 1$, donde $1/\sqrt[n]{a} \to 1$. Então, pelo item d) do Teorema 2.8, concluímos que $\sqrt[n]{a} \to 1$.

2.10. Exemplo. $\sqrt[n]{n} \to 1$. Ainda aqui temos que $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, onde h_n novamente é um número positivo conveniente. Mas agora a desigualdade de Bernoulli é insuficiente para nossos propósitos, pois, com ela,

$$n = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n > nh_n, \text{ donde } h_n < 1,$$

e essa desigualdade não basta para provar que h_n tende a zero.

Apelamos para a fórmula do binômio, que permite escrever, já que $h_n > 0$:

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \ldots + h_n^n > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2,$$

donde $h_n^2 < 2/(n-1)$. Agora sim, dado $\varepsilon > 0$, $2/(n-1)$ será menor do que ε^2, desde que n seja maior do que $2/\varepsilon^2 + 1 = N$. Conseqüentemente,

$$n > N \Rightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| = h_n < \varepsilon,$$

provando o resultado desejado.

Exercícios

1. Escreva os cinco primeiros termos de cada uma das seguintes seqüências:

   a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$; b) $a_n = 3 + 2(-1)^n$; c) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$; d) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+2}$.

2. Em cada um dos casos seguintes, são dados os primeiros termos de uma seqüência. Supondo que persista a tendência observada em cada caso, escreva a forma geral de cada uma das seqüências.

   a) $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \ldots$; ; b) $1, -1/2, 1/3, -1/4 \ldots$;

   c) $1, 1/4, 1/9, 1/16, \ldots$; d) $1, -1/2, 1/6, -1/24, 1/120, \ldots$

3. Use a Definição 2.1 para provar que

   a) $\lim \dfrac{n}{n^2+1} = 0$; b) $\lim \dfrac{2n^2}{n^2+7} = 2$; c) $\lim \dfrac{3n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+5} = 3$.

4. Descubra o limite de cada uma das seqüências seguintes e, em seguida, demonstre que o suposto limite satisfaz a Definição 2.1.

$$\text{a) } a_n = \frac{n\cos\sqrt{n^2+7}}{n^2+1}; \quad \text{b) } a_n = \frac{\sqrt{n}(1+8\sqrt{n})}{4n-1}; \quad \text{c) } a_n = \frac{n^3-1}{2n^3-n}.$$

5. (Unicidade do limite) Prove que uma seqüência só pode convergir para um único limite.

6. Prove que se a_n tem limite L, então $|a_n|$ tem limite $|L|$. Dê exemplo de uma seqüência (a_n) tal que $|a_n|$ converge, mas não a_n.

7. Sejam (a_n) e (b_n) duas seqüências tais que $|a_n - a| < C|b_n|$, onde a é um certo número real e C uma constante positiva. Usando a definição de limite, mostre que se $b_n \to 0$ então $a_n \to a$.

8. Prove que se (a_n) é uma seqüência que converge para zero e (b_n) uma seqüência limitada, não necessariamente convergente, então $(a_n b_n)$ converge para zero.

9. Prove que a seqüência $a_n = \sqrt{n+h} - \sqrt{n}$ tende a zero.

10. Faça o mesmo para a seqüência $a_n = a^n$, onde $0 < a < 1$.

11. Supondo que $a_n \geq 0$ para todo n e $a_n \to 0$, prove que $\sqrt{a_n} \to 0$.

12. Supondo que $a_n \to x > 0$, prove que $a_n > 0$ a partir de um certo N.

13. Prove os ítens a) e b) do Teorema 2.8. Generalize a propriedade da soma, provando que o limite de uma soma qualquer de seqüências convergentes é a soma dos limites. Generalize também a propriedade do produto para o caso de vários fatores.

14. Prove que se (a_n) é uma seqüência convergente, com $a_n \leq b$, então $\lim a_n \leq b$. Mostre com contra-exemplo que, mesmo que seja $a_n < b$, não é verdade, em geral, que $\lim a_n < b$. Enuncie e demonstre propriedade análoga no caso $a_n > b$.

15. Sejam (a_n) e (b_n) seqüências convergentes, com $a_n \leq b_n$. Prove que $\lim a_n \leq \lim b_n$. Mostre por meio de contra-exemplo que também aqui pode ocorrer a igualdade dos limites mesmo que seja $a_n < b_n$. [Observe que o exercício anterior é um caso particular deste, com seqüência $(b_n) = (b, b, \ldots)$.]

16. **(Critério de confronto ou Teorema da seqüência intercalada.)** Sejam (a_n), (b_n) e (c_n) três seqüências tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$, (a_n) e (c_n) convergindo para o mesmo limite L. Demonstre que (b_n) também converge para L.

17. Prove que $\sqrt[n]{\sqrt{n}} \to 1$.

18. A negação da Definição 2.1 é "a_n não converge para L". Mas como escrever essa negatição em termos de ε e N?

Sugestões e soluções

2. a) $n/(n+1)$, $n \geq 1$; b) $(-1)^{n+1}/n$, $n \geq 1$, ou $(-1)^n/(n+1)$, $n \geq 0$;
c) $1/n^2$, $n \geq 1$; d) $-(-1)^n/n!$, $n \geq 1$.

3. a) $|a_n| < \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$; b) $|a_n - 2| = \dfrac{14}{n^2+7} < \dfrac{14}{n^2}$; c) $|a_n - 3| = \dfrac{15}{n\sqrt{n}+5} < \dfrac{15}{n\sqrt{n}}$.

4. b) $|a_n - 2| = \dfrac{\sqrt{n}+2}{4n-1} \leq \dfrac{\sqrt{n}+2\sqrt{n}}{4n-n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

5. Suponha existirem dois limites distintos, L e L' e tome $\varepsilon < |L - L'|/2$. Então, $|a_n - L| < \varepsilon$ a partir de um certo N_1 e $|a_n - L'| < \varepsilon$ a partir de um certo N_2. Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$, de forma que $n > N$ acarreta simultaneamente $n > N_1$ e $n > N_2$. Assim, $n > N$ acarreta $|L - L'| = |(L - a_n) + (a_n - L')| \leq |a_n - L| + |a_n - L'| < 2\varepsilon < |L - L'|$, o que é absurdo.

9. Multiplique numerador e denominador pela soma das raizes que aparecem na definição da seqüência.

10. Como $b = 1/a > 1$, $b = 1 + c$, com $c > 0$. Então,

$$b^n = \frac{1}{a^n} = (1 + c)^n > 1 + nc > nc; \quad \text{logo, } a^n < \frac{1}{nc}.$$

Outro modo, utilizando o logaritmo, baseia-se no seguinte:

$$a^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \log a < \log \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\log \varepsilon}{\log a}.$$

Nessa última passagem, ao dividir a desigualdade por $\log a$, levamos em conta que esse número é negativo, daí a mudança de sinal da desigualdade.

11. Deseja-se provar que $\sqrt{a_n} < \varepsilon$ a partir de um certo N. Observe que isto equivale a $a_n < \varepsilon^2$.

12. Use o Teorema 2.6.

13. $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$.

17. Use o critério de confronto, notando que $1 \leq \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{n}$.

18. "Existe um $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja o número natural N, existe um índice $n > N$ tal que $|a_n - L| > \varepsilon$". Isto é o mesmo que: "Existe um $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja o número natural N, existe uma infinidade de índices $n > N$ tais que $|a_n - L| > \varepsilon$".

Seqüências monótonas

Há pouco vimos que toda seqüência convergente é limitada. Mas nem toda seqüência limitada é convergente, como podemos ver através de exemplos simples como os seguintes:

1) $a_n = (-1)^n$ assume alternadamente os valores $+1$ e -1, portanto, não converge para nenhum desses valores;

2) $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$ é um exemplo parecido com o anterior, mas agora a seqüência assume uma infinidade de valores, formando um conjunto de pontos que se acumulam em torno de -1 e $+1$. Mas a seqüência não converge para nenhum desses valores. Se ela fosse simplesmente $1 + 1/n$, então convergiria para o número 1.

Veremos, entretanto, que há uma classe importante de seqüências limitadas — as chamadas seqüências "monótonas" — que são convergentes.

2.11. Definições. *Diz-se que uma seqüência* (a_n) *é* crescente *se* $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ *e* decrescente *se* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$ *Diz-se que a seqüência é* não decrescente *se* $a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_n \leq \ldots$ *e* não crescente *se*

$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ *Diz-se que a seqüência é* monótona *se ela satisfaz qualquer uma dessas condições.*

As seqüências monótonas limitadas são convergentes, como veremos logo a seguir. Esse é o primeiro resultado que vamos estabelecer, em cuja demonstração utilizamos a propriedade do supremo. Aliás, foi a necessidade de fazer tal demonstração para "funções monótonas" (Veja o Teorema 4.14, p. 114) a principal motivação que teve Dedekind em sua construção dos números reais.

2.12. Teorema. *Toda seqüência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Consideremos, para fixar as idéias, uma seqüência não decrescente (a_n) (portanto, limitada inferiormente pelo elemento a_1). A hipótese de ser limitada significa que ela é *limitada superiormente*; logo, seu conjunto de valores possui supremo S. Vamos provar que esse número S é o limite de a_n.

Dado $\varepsilon > 0$, existe um elemento da seqüência, com um certo índice N, tal que $S - \varepsilon < a_N \leq S$. Ora, como a eqüência é não decrescente, $a_N \leq a_n$ para todo $n > N$, de sorte que

$$n > N \Rightarrow S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon,$$

que é o que desejávamos demonstrar.

A demonstração do teorema no caso de uma seqüência não crescente é análoga e fica para os exercícios.

O número e

O número e, base dos logaritmos naturais, aparentemente surgiu na Matemática pela consideração de um problema de juros compostos instantaneamente (veja nosso livro de Cálculo 1). Nesse contexto ele é definido mediante o limite

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Trata-se, evidentemente, de uma forma indeterminada do tipo 1^∞, pois enquanto o expoente tende a infinito, a base $1 + 1/n$ tende decrescentemente a 1.

Vamos provar que a seqüência que define e é crescente e limitada, portanto, tem limite. Pela fórmula do binômio de Newton,

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots \\ &+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Uma expressão para a_{n+1}, como esta última, conterá um termo a mais no final, além dos que aí aparecem, com $n+1$ em lugar de n, exceto em $n!$ Mesmo sem levar em conta o termo a mais, pode-se ver que cada um dos termos de (2.7) é inferior a cada um dos correspondentes com $n+1$ em lugar de n. Isso prova que $a_n < a_{n+1}$, isto é, a seqüência (a_n) é crescente. Para provarmos que ela é limitada, basta observar que cada parênteses que aparece em (2.7) é menor do que 1, de sorte que

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3. \tag{2.8}$$

Sendo crescente e limitada, (a_n) tem limite, que é o número e. Fica claro também que esse número está compreendido entre 2 e 3.

Da expressão (2.7) para a_m decorre que, sendo $m > n$,

$$a_m > 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right).$$

Mantendo fixo o número n, fazemos $m \to \infty$, o que nos dá: $e \geq 2 + 1/2! + \ldots + 1/n!$. Daqui e de (2.8) obtemos, finalmente, com $n \to \infty$,

$$e = \lim\left(2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right). \tag{2.9}$$

Mostremos também que $\lim\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$. Para isso, notamos que, sendo $m = n - 1$,

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n/(n-1)} = \frac{1}{(m+1)/m} = \frac{1}{1 + 1/m};$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\left(1 + \frac{1}{m}\right) \to e.$$

Em vista disso podemos escrever:

$$e = \lim_{n \to \pm\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Subseqüências

Quando eliminamos um ou vários termos de uma dada seqüência, obtemos o que se chama uma "subseqüência" da primeira. Assim, a seqüência dos números pares positivos é uma subseqüência da seqüência dos números naturais. O

mesmo é verdade da seqüência dos números ímpares positivos; da seqüência dos números primos; ou da seqüência 1, 3, 20, 37, 42, 47, ..., isto é,

$$a_1 = 1,\ a_2 = 13,\ a_3 = 20,\ a_n = 5n + 17 \text{ para } n \geq 4.$$

Uma definição precisa desse conceito é dada a seguir.

2.13. Definição. *Uma subseqüência de uma dada seqüência (a_n) é uma restrição dessa seqüência a um subconjunto infinito N' do conjunto N dos números naturais.* Dito de outra maneira, *uma subseqüência de (a_n) é uma seqüência* do tipo $(b_j) = (a_{n_j})$, *onde (n_j) é uma seqüência crescente de inteiros positivos, isto é, $n_1 < n_2 < \ldots$*

Como conseqüência dessa definição, $1 \leq n_1$, $2 \leq n_2, \ldots$, e, em geral, $j \leq n_j$. Mas, como $j < n_j$ para algum j (a não ser que a subseqüência seja a própria seqüência dada), esta desigualdade permanecerá válida para todos os índices subseqüentes ao primeiro índice para o qual ela ocorrer.

A seqüência $(a_n) = (-1)^n(1 + 1/n)$ tem subseqüências (a_{2n}), (a_{4n}), (a_{6n}) etc., todas convergindo para 1; e subseqüências (a_{2n-1}), (a_{4n-1}), (a_{6n-1}) etc., todas convergindo para -1. Mas tem também subseqüências divergentes, como $(a_{n^2}) = (a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots) = (-2, 5/4, -10/9, 17/16,)$.

2.14. Teorema. *Se uma seqüência (a_n) converge para um limite L, então toda sua subseqüência (a_{n_j}) também converge para L.*

Demonstração. De $a_n \to L$ segue-se que, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe N tal que $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. Como vimos acima, $n_j \geq j$, de forma que $j > N \Rightarrow (n_j > N \Rightarrow |a_{n_j} - L| < \varepsilon)$, o que completa a demonstração.

Limites infinitos

Certas seqüências, embora não convergentes, apresentam regularidade de comportamento, o termo geral tornando-se ou arbitrariamente grande ou arbitrariamente pequeno com o crescer do índice. Diz-se então que a seqüência *diverge* para $+\infty$ ou para $-\infty$ respectivamente. Damos a seguir as definições precisas desses conceitos.

2.15. Definições. *Diz-se que a seqüência (a_n) diverge (ou tende) para $+\infty$ e escreve-se $\lim a_n = +\infty$ ou $\lim a_n = \infty$ se, dado qualquer número positivo k, existe N tal que $n > N \Rightarrow a_n > k$. Analogamente, (a_n) diverge (ou tende) para $-\infty$ se, dado qualquer número negativo k, existe N tal que $n > N \Rightarrow a_n < k$; neste caso, escreve-se $\lim a_n = -\infty$.*

Por exemplo, é fácil verificar, á luz dessas definições, que as seqüências $a_n = n, a_n = n^2 + 1$ e $a_n = \sqrt{n}$ tendem, todas elas, a $+\infty$, enquanto que $a_n = -n$, $a_n = 3 - n^2$ e $a_n = 6 - \sqrt{n}$ tendem a $-\infty$.

As propriedades relacionadas no teorema seguinte são de fácil demonstração e ficam para os exercícios.

2.16. Teorema. *a)* $a_n \to +\infty \Leftrightarrow -a_n \to -\infty$.

b) Seja (a_n) *uma seqüência não limitada. Sendo não decrescente, ela tende a* $+\infty$*; e sendo não crescente, ela tende a* $-\infty$.

c) Se $\lim a_n = \pm\infty$, *então* $1/a_n$ *tende a zero.*

d) Se $\lim a_n = 0$, *então* $1/a_n$ *tende a* $+\infty$ *se* $a_n > 0$, *e tende a* $-\infty$ *se* $a_n < 0$.

e) Se (b_n) *é uma seqüência limitada e* $a_n \to +\infty$ *ou a* $-\infty$, *então a seqüência* $(a_n + b_n)$ *tende a* $+\infty$ *ou a* $-\infty$ *respectivamente.*

f) Se $a_n \to +\infty$ *e* $b_n \geq c$, *onde* c *é um número positivo, então* $a_n b_n \to +\infty$. *(Em particular,* $a_n \to +\infty$ *e* $b_n \to +\infty \Rightarrow a_n b_n \to +\infty$.*) Formule e demonstre as outras possibilidades:* $a_n \to +\infty$ *e* $b_n \leq c < 0$, $a_n \to -\infty$ *e* $b_n \geq c > 0$, $a_n \to -\infty$ *e* $b_n \leq c < 0$.

g) Se $a_n \to +\infty$ *e* $a_n \leq b_n$, *então* $b_n \to +\infty$.

2.17. Exemplo. A seqüência a^n, com $a > 1$, tende a infinito. De fato, $0 < 1/a < 1$, de forma que, pelo Exerc. 10 da p. 25, $(1/a)^n = 1/a^n$ tende a zero; logo, pelo item d) do teorema anterior, $a^n \to \infty$.

Podemos também raciocinar assim: $a = 1 + h$, onde $h > 0$. Então $a^n = (1+h)^n > 1 + nh > nh > k \Leftrightarrow n > k/h$.

Outro modo de tratar esse limite faz uso do logaritmo, assim:

$$a^n > k \Leftrightarrow n \log a > \log k \Leftrightarrow n > \frac{\log k}{\log a}$$

Outra maneira ainda apóia-se na igualdade $a^n = e^{(\log a)n}$, pressupondo o conhecimento da função exponencial e de suas propriedades; em particular, a propriedade segundo a qual $e^{(\log a)x}$ tende a infinito com $x \to \infty$. Como a seqüência em pauta é uma restrição dessa função ao dominio dos números naturais, é claro que ela também tende a infinito.

2.18. Exemplo. A seqüência $a_n = n^k$, onde k é um inteiro positivo, tende a infinito por ser o produto de k fatores que tendem a infinito. No entanto, ela tende a infinito "mais devagar" do que a^n ($a > 1$, evidentemente). Podemos ver isso considerando a razão $r_n = n^k/a^n$ como restrição da função

$$f(x) = \frac{x^k}{a^x} = \frac{x^k}{e^{(\log a)x}},$$

a qual, como sabemos do Cálculo, tende a zero com $x \to \infty$. Concluímos assim que r_n tende a zero, e é isso o significado preciso de dizer que o numerador n^k tende a infinito "mais devagar" do que a^n.

Outro modo de tratar a mesma questão baseia-se na propriedade do Exerc. 8 adiante. Para isso basta observar que

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \to \frac{1}{a} < 1.$$

2.19. Exemplo. Mostraremos agora que a seqüência a^n, com $a > 1$, tende a infinito mais devagar que $n!$ Para isso, notamos que, sendo $n > N$,

$$\frac{a^n}{n!} = \left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N}\right)\left(\frac{a}{N+1}\cdot\frac{a}{N+2}\cdots\frac{a}{n}\right).$$

Fixando N tal que $a/N < 1/2$, cada um dos $n-N$ fatores do segundo parênteses será inferior a $1/2$, logo,

$$\frac{a^n}{n!} < \left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N}\right)2^{N-n} = 2^{-n}c,$$

onde $c = (2a)^N/N!$ é uma constante que só depende de N, que já está fixado. Essa desigualdade prova então que a razão de a^n para $n!$ tende a zero, significando que a primeira dessas seqüências tende a infinito mais devagar que a segunda.

2.20. Exemplo. Provemos finalmente que a seqüência $n!$ é ainda mais vagarosa que n^n. De fato, basta notar que

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n} < \frac{1}{n} \to 0.$$

Em vista dos três últimos exemplos acima, vemos que (sendo $a > 1$),

$$\lim\frac{n^k}{a^n} = 0; \quad \lim\frac{a^n}{n!} = 0; \quad \lim\frac{n!}{n^n} = 0. \tag{2.10}$$

Na linguagem sugestiva que vimos usando, isso significa que, embora as quatro seqüências n^k, a^n, $n!$ e n^n tendam todas a infinito, cada uma tende a infinito mais devagar do que a seguinte.

Seqüências recorrentes

Freqüentemente o termo geral de uma seqüência é definido por uma função de um ou mais de seus termos precedentes. A seqüência se chama, então, apropriadamente, *indutiva* ou *recorrente*. Veremos a seguir um exemplo interessante de seqüência recorrente. Outros exemplos são dados nos exercícios.

Exemplo 2.21. Consideramos aqui uma seqüência que tem origem num método de extração da raiz quadrada, aparentemente já conhecido na

Mesopotâmia de 18 séculos antes de Cristo! Dado um número positivo qualquer N, deseja-se achar um número a tal que $a \cdot a = N$. Acontece que, em geral, não dispomos do valor exato da raiz, e o número a é apenas um valor aproximado. Sendo assim, o fator que deve multiplicar a para produzir N não é necessariamente a, mas sim o número N/a. Então, em vez de $a \cdot a = N$, temos

$$a \cdot \frac{N}{a} = N.$$

Vemos, nesse produto, que se o fator a aumenta, o fator N/a diminui; e se a diminui, N/a aumenta. O valor desejado de a é aquele que faz com que ele seja igual a N/a, quando será a raiz quadrada exata de N. Em geral, sendo a uma raiz aproximada por falta, N/a será raiz aproximada por excesso e vice-versa, de sorte que a raiz exata está compreendida entre um e outro desses fatores. Daí a idéia de tomar a média aritmética deles, isto é,

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{N}{a}\right),$$

como um valor que talvez seja melhor aproximação de $\sqrt{N}$ do que o valor original a. Segundo esse argumento, é de se esperar que

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{N}{a_1}\right)$$

seja melhor aproximação ainda. Prosseguindo dessa maneira, construímos a seqüência *recorrente*

$$a_0 = a; \quad a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{N}{a_{n-1}}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

É notável que essa seqüência, cujas origens datam de tão alta antigüidade, seja talvez o mais eficiente método de extração da raiz quadrada, como se prova com relativa facilidade. (Veja o Exerc. 20 adiante.)

Exercícios

1. Seja (a_n) uma seqüência monótona que possui uma subseqüência convergindo para um limite L. Prove que (a_n) também converge para L.
2. Prove que toda seqüência monótona convergente é limitada.
3. Sejam N_1 e N_2 subconjuntos infinitos e disjuntos do conjunto dos números naturais $\mathbf{N}$, cuja união é o próprio $\mathbf{N}$. Seja (a_n) uma seqüência cujas restrições a N_1 e N_2 convergem para o mesmo limite L. Prove que (a_n) converge para L.
4. Construa uma seqüência que tenha uma subseqüência convergindo para -3 e outra convergindo para 8.

5. Construa uma seqqüência que tenha três subseqüências convergindo, cada uma para cada um dos números 3, 4, 5.
6. Generalize o exercício anterior: dados os números $L_1, L_2, \ldots, L_k$, distintos entre si, construa uma seqüência que tenha k subseqüências, cada uma convergindo para cada um desses números.
7. Construa uma seqüência que tenha subseqüências convergindo, cada uma para cada um dos números inteiros positivos.
8. Construa uma seqüência que tenha subseqüências convergindo, cada uma para cada um dos números reais.
9. Prove que se $a_n > 0$ e $a_{n+1}/a_n \leq c$, onde $c < 1$, então $a_n \to 0$.
10. Prove que se $a_n > 0$ e $a_{n+1}/a_n \to c$, onde $c < 1$, então $a_n \to 0$.
11. Demonstre o teorema 2.16.
12. Prove que se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to L > 0$, então $a_n b_n rig + \infty$. Examine também as demais combinações de $a_n \to \pm\infty$ com L positivo ou negativo.
13. Prove que $5n^3 - 4n^2 + 7$ tende a infinito.
14. Prove que um polinômio $p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ tende a $\pm\infty$ conforme seja a_k positivo ou negativo respectivamente.
15. Seja $p(n)$ como no exercício anterior, com $a_k > 0$. Mostre que $\sqrt[n]{p(n)} \to 1$.
16. Mostre que $\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n+h} \to \infty$.
17. Mostre que $\sqrt[n]{n!} \to \infty$.
18. Considere a seqüência assim definida: $a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ para $n > 1$. Escreva explicitamente os primeiros quatro ou cinco termos dessa seqüência. Prove que ela é uma seqüência convergente e calcule seu limite.
19. Generalize o exercício anterior considerando a seqüência $a_1 = \sqrt{a}$, $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$, onde $a > 0$.
20. Dado um número $N > 0$ e fixado um número qualquer $a_0 = a$, seja $a_n = (a_{n-1} + N/a_{n-1})/2$ para $n > 1$. Prove que, a excessão, eventualmente, de a_0, essa seqüência é decrescente. Prove que ela aproxima $\sqrt{N}$ e dê uma estimativa do erro que se comete aó se tomar a_n como aproximação de $\sqrt{N}$.
21. Prove que a seqüência anterior é exatamente a mesma que se obtém com a aplicação do método de Newton para achar a raiz aproximada de $x^2 - N = 0$.
22. **(Divisão áurea).** Já vimos (p. 23) que um ponto A_1 de um segmento OA efetua a divisão áurea desse segmento se $OA/OA_1 = OA_1/A_1A$. Vimos também que o número ϕ, raiz positiva de $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ [$= (\sqrt{5}+1)/2 \approx 1,618$], é chamado a *razão áurea*. Considere um eixo de coordenadas com origem O, $a_0 = 1$ a abscissa de A ($= A_0$) e $a_1 = \varphi$ a abscissa de A_1. Construa a seqüência de pontos A_n com abscissa $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$, $n \geq 2$. Prove, como já anunciamos na p. 24, que A_n efetua a divisão áurea do segmento OA_{n-1} e que $a_n \to 0$. Observe que os pares (a_0, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3), etc., são os lados de retângulos áureos, como na construção de uma infinidade de retângulos áureos da p. 23. Escreva os primeiros dez termos da seqüência a_n.
23. **(Seqüência de Fibonacci).**[1] Defina f_n indutivamente assim: $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$. Escreva os primeiros dez elementos dessa seqüência e observe que, pelo menos

[1] Veja a explicação da origem dessa seqüência em nosso artigo na RPM 6 ou no artigo do Prof. Alberto Azevedo na RPM 45.

para os primeiros valores de n, vale a relação: $a_n = (-1)^n(f_{n-2} - \varphi f_{n-1})$, onde a_n é a seqüência do exercício anterior. Prove, por indução, que essa relação é válida para todo $n \geq 2$. Prove que a seqüência $x_n = f_n/f_{n+1}$ é convergente e seu limite é a razão áurea.

Sugestões e soluções

4. A seqüência $a_{2n} = -3$ e $a_{2n+1} = 8$ resolve. Construa outro exemplo.

5. Dado $n \in \mathbb{N}$, seja r_n o resto de sua divisão por 3. Verifique que $a_n = r_n$ resolve o problema.

6. Seja r_n o resto da divisão de n por k. $a_n = L_{r_n}$ resolve; explique por quê.

7. Construa a seqüência assim: 1; depois 1, 2; depois 1, 2, 3; depois 1, 2, 3, 4; e assim por diante, de forma que a seqüência é: 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4,... Outro modo: decomponha o conjunto dos números naturais N numa união de conjuntos infinitos e disjuntos N_1, N_2,... Por exemplo. N_1 pode ser o conjunto dos números ímpares, $N_2 = 2N_1$, $N_3 = 2^2N_1$,...; e, em geral, $N_n = 2^{n-1}N_1$. Verifique que esses N_n são realmente disjuntos e todo número natural está em um deles. Em seguida defina a seqüência assim: $a_n = m$ se $n \in N_m$. Outro modo: considere uma seqüência r_1, r_2, r_3,..., obtida por enumeração de todos os números racionais. Observe que este exemplo também responde às exigências dos Exercs. 4 a 6. Observe também que as soluções dadas naqueles exercícios resultavam em subseqüências constantes, ao passo que os termos de r_n são todos diferentes entre si.

8. A seqüência (r_n) do exercício anterior resolve. Outra solução, ainda com a notação do exercício anterior: defina $a_n = r_m$ se $n \in N_m$.

10. Utilize o Teorema 2.6, tomando, por exemplo, $B = c + (1 - c)/2$.

14. Observe que $p(n) = a_k n^k(1 + \ldots) = a_k n^k b_n$, onde b_n é a expressão entre parênteses, que tende a 1.

17. Observe que $\sqrt[n]{n!} > K \Leftrightarrow n! > K^n$. Agora lembre-se de que $n!$ tende a infinito mais depressa do que K^n, qualquer que seja K.

18. Supondo por um momento que (a_n) convirja para um certo L, passamos ao limite em $a_n^2 = 2 + a_{n-1}$, resolvemos a equação resultante e achamos $L = 2$. (Mas *é preciso* provar a existência do limite! Veja este exemplo: a seqüência 1, 3, 7, 15, 31,...; em geral, $a_n = 2a_{n-1} + 1$, evidentemente não converge, logo, não podemos simplesmente passar ao limite nessa última igualdade para obter $L = 2L + 1$, ou $L = -1$.) Prove que a seqüência dada é crescente e limitada superiormente por 2.

19. Seja $b = \max\{a, \sqrt{a}, 2\}$. Claramente, $a_1 \leq b$ e, supondo $a_n \leq b$, teremos $a_{n+1} \leq \sqrt{a + b} \leq \sqrt{2b} \leq 2b$. Isso prova que a seqüência é limitada superiormente. Prova-se também que ela é crescente, notando que $a_2 > a_1$ e que, supondo $a_n > a_{n-1}$, então $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n} > \sqrt{a + a_{n-1}} = a_n$. Agora é só passar ao limite na fórmula de definição e achar a raiz positiva de $L^2 = a + L$, isto é, $L = (1 + \sqrt{1 + 4a})/2$.

20. Por um cálculo simples, $a_1 - \sqrt{N} = (a - \sqrt{N})^2/2a$. Isto prova que $a_1 > \sqrt{N}$ (mesmo que $a < \sqrt{N}$). Além disso, se $a > \sqrt{N}$,

$$a_1 - \sqrt{N} = \frac{(a - \sqrt{N})^2}{2a} = \frac{a - \sqrt{N}}{2a}(a - \sqrt{N}) < \frac{1}{2}(a - \sqrt{N}) < a - \sqrt{N},$$

mostrando que $\sqrt{N} < a_1 < a$. Com o mesmo tipo de raciocinio, mesmo que a seja menor do que $\sqrt{N}$, prova-se que $\sqrt{N} < a_{n+1} < a_n < \ldots < a_1$ e que

$$0 < a_{n+1} - \sqrt{N} < \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{N}) < \ldots < \frac{a_1 - \sqrt{N}}{2^n}.$$

22. Das definições dadas segue-se que

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 - a_2}{a_0 - a_1}, \text{ donde } \frac{OA_2}{OA_1} = \frac{A_2A_1}{OA_2},$$

mostrando que A_2 divide OA_1 na razão áurea. Com raciocinio análogo prova-se, por indução, que A_n divide $0A_{n-1}$ na razão áurea.

Para provar que $a_n \to 0$, prove que

$$\varphi = \frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

e conclua que $a_n = \varphi^n$.

23. Como já observamos, a relação $a_n = (-1)^n(f_{n-2} - \varphi f_{n-1})$ é válida para os primeiros valores de n; na verdade, basta saber que vale para $n = 2$. Vamos provar que se ela valer para $n = 2, 3, \ldots, k$, ela deve valer para $n = k + 1$. Por definição, $a_{k+1} = a_{k-1} - a_k$; e como a relação que desejamos provar vale para $n = 2, 3, \ldots, k$, temos:

$$a_{k+1} = a_{k-1} - a_k = (-1)^{k-1}(f_{k-3} - \varphi f_{k-2}) - (-1)^k(f_{k-2} - \varphi f_{k-1});$$

mas $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$ e $(-1)^k = -(-1)^{k+1}$, de forma que

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (-1)^{k+1}(f_{k-3} - \varphi f_{k-2} + f_{k-2} - \varphi f_{k-1}) \\ &= (-1)^{k+1}[f_{k-3} + f_{k-2} - \varphi(f_{k-2} + f_{k-1})] \\ &= (-1)^{k+1}(f_{k-1} - \varphi f_k), \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. A parte final do exercício fica por conta do leitor.

Intervalos encaixados

Veremos, a seguir, uma importante conseqüência da propriedade do supremo.

2.22. Teorema dos intervalos encaixados. *Seja* $I_n = [a_n, b_n], n = 1, 2, \ldots,$ *uma família de intervalos fechados e encaixados, isto é,* $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$. *Então existe pelo menos um número* c *pertencendo a todos os intervalos* I_n *(ou, o que é o mesmo,* $c \in I_n \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n \cap \ldots$*). Se, além das hipóteses feitas, o comprimento* $|I_n| = b_n - a_n$ *do* n*-ésimo intervalo tender a zero, então o número* c *será único, isto é,* $I_1 \cap I_2 \cap \ldots I_n \cap \ldots = \{c\}$.

Demonstração. É claro que as seqüências (a_n) e (b_n) são, respectivamente, não decrescente e não crescente. Além disso, como

$$a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1,$$

vemos que (a_n) é limitada à direita por b_1 e (b_n) é limitada à esquerda por a_1: logo, essas duas seqüências possuem limites, digamos, A e B respectivamente. Como $a_n < b_n$, é claro que

$$a_n \leq A \leq B \leq b_n.$$

Isso significa que $[A, B] \subset I_n$ para todo n. Então, se $A < B$, a interseção dos intervalos I_n é o próprio intervalo $[A, B]$; e se $A = B$, como é o caso se $b_n - a_n$ tende a zero, essa interseção é o número $c = A = B$. Isso completa a demonstração.

A condição de que os intervalos I_n sejam fechados é essencial no teorema anterior. Por exemplo, os intervalos $I_n = (0, 1/n)$ são encaixados e limitados, mas não são fechados. É fácil ver que sua interseção é vazia, não havendo um só número que pertença a todos esses intervalos. É também essencial que os intervalos sejam limitados. Por exemplo, $I_n = [n, \infty)$ é uma família de intervalos fechados e encaixados, mas sua interseção é vazia; eles não são limitados.

Pontos aderentes e teorema de Bolzano-Weierstrass

Já vimos que se uma seqüência converge para um certo limite, qualquer subseqüência sua converge para esse mesmo limite. Quando a seqüência não converge, nem tende para $+\infty$ ou $-\infty$, diz-se que ela é *oscilante*. De fato, como veremos, nesse caso ela sempre terá várias subseqüências, cada uma tendendo para um limite diferente. Por exemplo, as seqüências $(-1)^n$, $(-1)^n(1 + 1/n)$, e $(-1)^n(1 - 1/n)$ possuem, todas elas, subseqüências convergindo ou para $+1$ ou para -1. Esses números são chamados "valores de aderência" da seqüência sob consideração.

2.23. Definição. *Diz-se que L é um* valor de aderência *ou* ponto de aderência *de uma dada seqüência (a_n) se (a_n) possui uma subseqüência convergindo para L.*

Quando a seqüência não é limitada, seus elementos podem se espalhar por toda a reta, distanciando-se uns dos outros, como acontece com $a_n = n$, $a_n = 1 - n$ ou $a_n = (-1)^n(2n + 1)$. Em casos como esses não há, é claro, pontos aderentes.

Se a seqüência for limitada, estando seus elementos confinados a um intervalo $[A, B]$, eles são forçados a se acumularem em um ou mais "lugares" desse intervalo, o que resulta em um ou mais pontos aderentes da seqüência. Esse é o conteúdo do "teorema de Bolzano-Weierstrass", considerado a seguir. O leitor pode observar que sua demonstração está baseada na propriedade do supremo, via teorema dos intervalos encaixados.

2.24. Teorema (de Bolzano-Weierstrass). *Toda seqüência limitada (a_n) possui uma subseqüência convergente.* (Veja a versão original desse teorema na p. 129.)

Demonstração. Vamos utilizar o chamado método de bisseção, que explicaremos a seguir, no contexto da demonstração. Seja (a_n) uma seqüência

limitada, portanto, toda contida num intervalo fechado I, de comprimento c. Dividindo esse intervalo ao meio, obtemos dois novos intervalos (fechados) de mesmo comprimento $c/2$, um dos quais necessariamente conterá infinitos elementos da seqüência; seja I_1 esse intervalo. (Se os dois intervalos contiverem infinitos elementos da seqüência, escolhe-se um deles para ser I_1.) O mesmo procedimento aplicado a I_1 nos conduz a um intervalo fechado I_2, de comprimento $c/2^2$, contendo infinitos elementos da seqüência.

Continuando indefinidamente com esse procedimento, obtemos uma seqüência de intervalos fechados e encaixados I_n, de comprimento $c/2^n$, que tende a zero, cada um contendo infinitos elementos da seqüência a_n. Seja L o elemento que, pelo Teorema 2.22, está contido em todos os intervalos I_n. Agora é só tomar um elemento a_{n_1} da seqüência (a_n) no intervalo I_1, a_{n_2} no intervalo I_2 etc., tomando-os um após outro de forma que $n_1 < n_2 < \ldots$ Assim obtemos uma subseqüência (a_{n_j}) convergindo para L. De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, seja N tal que $c/2^N < \varepsilon$, de sorte que $I_m \subset (L - \varepsilon,\ L + \varepsilon)$ para $m > N$. Portanto, para $j > N$, n_j será maior do que N (pois $n_j \geq j$), logo, a_{n_j} estará no intervalo $(L - \varepsilon,\ L + \varepsilon)$, o que prova que $a_{n_j} \to L$.

O leitor deve notar que a demonstração pode eventualmente permitir duas escolhas de intervalos em um ou mais estágios da divisão dos intervalos. Isto significa que pode haver uma, duas ou mais subseqüências convergentes, o que significa também que a seqüência original pode ter vários pontos aderentes.

Critério de convergência de Cauchy

O Teorema 2.12 é um "critério de convergência," ou seja, um teorema que permite saber se uma dada seqüência é convergente, sem conhecer seu limite de antemão. Mas ele refere-se a um tipo particular de seqüências, as seqüências monótonas. Em contraste, o teorema seguinte, de caráter geral, é um critério de convergência que se aplica a qualquer seqüência.

2.25. Teorema (critério de convergência de Cauchy). *Uma condição necessária e suficiente para que uma seqüência (a_n) seja convergente é que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, exista N tal que*

$$n,\ m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{2.11}$$

Observação. A condição do teorema costuma ser escrita da seguinte maneira equivalente: *dado $\varepsilon > 0$, existe um índice N tal que, para todo inteiro positivo p,*

$$n > N \Rightarrow |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon. \tag{2.12}$$

Demonstração. Provar que a condição é necessária significa provar que se (a_n) converge para um limite L, então vale a condição (2.11). Essa é a parte

mais fácil do teorema, pois, em vista da hipótese, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$n > N \text{ e } m > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon/2 \text{ e } |a_m - L| < \varepsilon/2.$$

Daqui e do fato de ser

$$|a_n - a_m| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leq |a_n - L| + |a_m - L|,$$

segue o resultado desejado.

Para provar que a condição é suficiente, a hipótese agora é (2.11). Queremos provar que existe L tal que $a_n \to L$. Não dispomos desse L, temos de provar sua existência. Procedemos provando, primeiro, que a seqüência em pauta é limitada; portanto, por Bolzano-Weierstrass, possui uma subseqüência convergente para um certo número L. Finalmente provamos que $a_n \to L$.

Fazendo $m = N+1$ em (2.11), teremos: $n > N \Rightarrow a_{N+1} - \varepsilon < a_n < a_{N+1} + \varepsilon$, donde se vê que a seqüência, a partir do índice $N + 1$, é limitada. Ora, os termos correspondentes aos primeiros N índices são em número finito; portanto, limitados, ou seja, a seqüência toda é limitada pelo maior dos números

$$|a_1|, \ldots, |a_N|, \ |a_{N+1} - \varepsilon|, \ |a_{N+1} + \varepsilon|.$$

Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, (a_n) possui uma subseqüência (a_{n_j}) que converge para um certo L. Fixemos j suficientemente grande para termos, simultaneamente, $|a_{n_j} - L| < \varepsilon$ e $n_j > N$. Então, como

$$|a_n - L| = |(a_n - a_{n_j}) + (a_{n_j} - L)| \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - L|,$$

teremos, finalmente:

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - L| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

e isso estabelece o resultado desejado.

2.26. Definição. *Chama-se* seqüência de Cauchy *toda seqüência que satisfaz uma das condições equivalentes (2.11) e (2.12).*

Como vimos no teorema anterior, seqüências de Cauchy são as seqüências convergentes. Esse tipo de seqüência surgiu no final do século XVIII em conexão com processos numéricos para resolver equações. Por exemplo, uma equação como $x^3 - 8x + 1 = 0$ pode-se escrever na forma $x = (x^3 + 1)/8$, ou $x = f(x)$, onde $f(x) = (x^3 + 1)/8$. Com a equação nesta forma, podemos construir uma seqüênncia numérica infinita, começando com um certo valor x_1, assim:

$$x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \quad x_4 = f(x_3), \quad \text{etc.}$$

Em geral, $x_n = f(x_{n-1})$, com $n = 2, 3, 4, \ldots$ Se for possível provar que essa é uma seqüência de Cauchy, saberemos que ela converge para um certo x_0. Em seguida procura-se provar que x_0 é solução da equação dada, os elementos x_n sendo valores aproximados da solução

O esquema que acabamos de descrever é, na verdade, um poderoso instrumento de cálculo numérico (conhecido como "método das aproximações sucessivas"), além de ter também uma enorme importância teórica em várias teorias matemáticas.

Exercícios

1. Prove que uma seqüência converge para L se e somente se L é seu único ponto de aderência.
2. Prove que uma seqüência limitada que não converge possui pelo menos dois pontos aderentes.
3. Prove que L é ponto de aderência de uma seqüência (a_n) se e somente se, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existem infinitos elementos da seqüência no intervalo $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$. (Note que esta última afirmação não significa que os infinitos elementos sejam todos distintos, podem até ter todos o mesmo valor.)
4. Construa uma seqüência com elementos todos distintos e que tenha pontos de aderência em -1, 1 e 2.
5. Construa uma seqüência com uma infinidade de elementos inferiores a 3 e superiores a 7, mas que tenha 3 e 7 como pontos aderentes e somente estes.
6. Construa uma seqüência com elementos todos distintos entre si, tendo como pontos de aderência k números distintos dados, $L_1 < \ldots < L_k$ e somente esses.
7. Sabemos que o conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais é enumerável. Seja (r_n) uma seqüência desses números numa certa enumeração, isto é, uma seqüência com elementos distintos, cujo conjunto de valores é $\mathbf{Q}$. Prove que todo número real é ponto de aderência dessa seqüência.
8. Seja (a_n) uma seqüência tal que toda sua subseqüência possui uma subseqüência convergindo para um mesmo número L. Prove que (a_n) converge para L.
9. Prove que uma seqüência (a_n) que não é limitada possui uma subseqüência (a_{n_j}) tal que $1/a_{n_j} \to 0$.
10. Dê exemplo de uma seqüência não limitada que tenha subseqüências convergentes; e de seqüência não limitada que não tenha uma única subseqüência convergente.
11. Vimos que a propriedade do supremo tem como conseqüência a propriedade dos intervalos encaixados. Prove que esta última propriedade implica a propriedade do supremo, ficando assim provado que a propriedade do supremo equivale à propriedade dos intervalos encaixados.
12. Prove que se postularmos que "toda seqüência não decrescente e limitada é convergente" conseguiremos provar a propriedade dos intervalos encaixados, portanto, também a propriedade do supremo, estabelecendo assim que esta propriedade é equivalente a afirmar que "toda seqüência não decrescente e limitada converge."
13. Prove, diretamente da Definição 2.26, que as seguintes seqüências são de Cauchy:

a) $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$; b) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$

14. Prove, diretamente da Definição 2.26, que se (a_n) e (b_n) são seqüências de Cauchy, também o são $(a_n + b_n)$ e $(a_n b_n)$.

15. Sejam (a_n) e (b_n) seqüências de Cauchy, com $b_n \geq b > 0$. a) Prove que (a_n/b_n) também é de Cauchy. b) Dê um contra-exemplo para mostrar que isto nem sempre é verdade se $b_n \to 0$.

16. Dados a_1 e a_2, com $a_1 < a_2$, considere a seqüência assim definida: $a_n = (a_{n-1} + a_{n-2})$, $n = 3, 4, 5, \ldots$ a) Prove que $a_1, a_3, a_5, \ldots$ é seqüência crescente e limitada; e que a seqüência de índices pares, $a_2, a_4, a_6, \ldots$, é decrescente e limitada. b) Prove que (a_n) é seqüência de Cauchy.

17. Observe que o Teorema 2.25 nos mostra que a propriedade do supremo tem como conseqüência que toda seqüência de Cauchy converge. Prove a recíprova dessa proposição, isto é, prove que se toda seqüência de Cauchy converge, então vale a propriedade do supremo, ficando assim provado que essa propriedade é equivalente a toda seqüência de Cauchy ser convergente.

Sugestões e soluções

1. Comece provando que a_n convergir para L significa que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, só existe um número finito de elementos da seqüência fora do intervalo $[L - \varepsilon,\ L + \varepsilon]$.

4. Eis um modo de fazer isso: considere três seqüências distintas, $-1+1/n$, $1+1/n$ e $2+1/n$, as quais convergem para -1, 1 e 2, respectivamente. Em seguida "misture" convenientemente essas seqüências; por exemplo, tomando um elemento de cada uma delas em sucessão e repetidamente, construindo a seqüência (a_n), assim definida:

$$a_{3n} = -1 + 1/3n; \quad a_{3n+1} = 1 + 1/(3n+1); \quad a_{3n+2} = 2 + 1/(3n+2).$$

6. Reveja o Exerc. 6 da p. 63.

8. Se (a_n) não converge para L, existe um $\varepsilon > 0$ e uma infinidade de elementos a_n tais que $|a_n - L| > \varepsilon$.

11. Seja C um conjunto não vazio e limitado superiormente. Queremos provar que C possui supremo. Seja $a_1 \leq$ algum elemento de C e $b_1 > a_1$ uma cota superior de C. Seja a$= (a_1 + b_1)/2$ e seja $[a_2, b_2]$ aquele dos intervalos $[a_1, a]$ e $[a, b_1]$ tal que $a_2 \leq$ algum elemento de C e b_2 é cota superior de C. Assim prosseguindo, indefinidamente, construimos uma família de intervalos encaixados $I_n = [a_n, b_n]$, cuja interseção determina um número real c. Prove que c é o supremo de C.

12. Prove primeiro que toda seqüência não crescente e limitada converge.

13. a) Observe que $|a_n - a_{n+p}| = \dfrac{p}{n(n+p)} < \dfrac{1}{n}$. Quanto à parte b), observe que $|a_n - a_{n+p}|$ é menor do que o R_n da p. 83.

14. Observe que $a_n b_n - a_m b_m = a_n(b_n - b_m) + b_m(a_n - a_m)$ e que (a_n) e (b_n) são seqüências limitadas.

15. Observe que

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_m}{b_m}\right| = \frac{|a_n b_m - a_m b_n|}{b_n b_m} \leq \frac{|a_n(b_m - b_n) + b_n(a_n - a_m)|}{b_n b_m},$$

que $b_n b_m \geq b^2$ e que as seqüências originais são limitadas.

16. a) Comece fazendo um gráfico representando a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, etc. Percebe-se que (a_{2n}) é seqüência decrescente e (a_{2n+1}) é crescente. Prove isso. b) Prove que

$$|a_n - a_{n-1}| = \frac{1}{2}|a_{n-1} - a_{n-2}| = \frac{1}{2^2}|a_{n-2} - a_{n-3}| = \ldots = \frac{1}{2^{n-2}}|a_2 - a_1|.$$

Observe também que

$$|a_n - a_{n+p}| \leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \ldots |a_{n+p-1} - a_{n+p}|.$$

17. Basta provar que vale a propriedade dos intervalos encaixados.

Notas históricas e complementares

A não enumerabilidade dos números reais

O Teorema 2.22 permite dar outra demonstração de que o conjunto dos números reais não é enumerável, como faremos agora. Raciocinando por absurdo, suponhamos que todos os números reais estivessem contidos numa seqüência (x_n). Seja $I_1 = [a_1, b_1]$ um intervalo que não contenha x_1. Em seguida tomamos um intervalo $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$, que não contenha x_2; depois um intervalo $I_3 = [a_3, b_3] \subset I_2$, que não contenha x_3; e assim por diante. Dessa maneira obtemos uma seqüência (I_n) de intervalos fechados e encaixados, tal que $\cap I_n$ conterá ao menos um número real c. Isso contradiz a hipótese inicial de que todos os números reais estão na seqüência (x_n), visto que $x_n \notin \cap I_n$. Somos, pois, forçados a abandonar a hipótese inicial e concluir que o conjunto dos números reais não é enumerável.

Cantor e os números reais

Vimos, no Capítulo 1, como Dedekind construiu os números reais a partir dos racionais. Exporemos agora a construção dos reais feita por Cantor.

Georg Cantor (1845–1918) nasceu em São Petersburgo, onde viveu até 1856, quando sua família transferiu-se para o sul da Alemanha. Doutorou-se pela Universidade de Berlim, onde foi aluno de Weierstrass, de quem teve grande influência em sua formação matemática. Toda a sua carreira profissional desenvolveu-se em Halle, para onde transferiu-se logo que terminou seu doutorado em Berlim.

Como no método de Dedekind, também no de Cantor partimos do pressuposto de que já estamos de posse dos números racionais, com todas as suas propriedades. Começamos com a seguinte definição: *diz-se que uma seqüência (a_n) de números racionais é uma seqüência de Cauchy se, qualquer que seja o número (racional) $\varepsilon > 0$, existe N tal que $n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$.* Uma tal seqüência costuma também ser chamada "seqüência fundamental." O próprio Cantor usou essa designação. Observe que existem pelo menos tantas seqüências de Cauchy quantos são os números racionais, pois, qualquer que seja o número racional r, a seqüência constante $(r_n) = (r, r, r, \ldots)$ é de Cauchy. Dentre as seqüências de Cauchy, algumas são convergentes, como essas seqüências constantes, uma seqüência como $(1/2, 2/3, 3/4, \ldots)$ e uma infinidade de outras mais. Mas há também toda uma infinidade de seqüências de Cauchy que não convergem (para número racional), como a seqüência das aproximações decimais por falta de $\sqrt{2}$,

$$(r_n) = (1,\ 14,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142\ldots), \tag{2.13}$$

ou a seqüência $a_n = (1 + 1/n)^n$ que define o número e. Como se vê, essas seqüências só não convergem por não existirem ainda os números chamados "irracionais." Para criá-los, podemos simplesmente *postular* que "toda seqüência de Cauchy (de números racionais) converge". Feito isso teremos de mostrar como esses novos números se juntam aos antigos (os racionais) de forma

a produzir um corpo ordenado completo. E nesse trabalho teríamos de provar que diferentes seqüências definem o mesmo número irracional; por exemplo, a seqüência (2.13) e a seqüência das aproximações decimais por excesso de $\sqrt{2}$ devem definir o mesmo número irracional $\sqrt{2}$. Do mesmo modo, as seqüências

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{e} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{n}$$

devem definir o mesmo número e.

Por causa disso torna-se mais conveniente primeiro juntar em uma mesma classe todas as seqüências que terão um mesmo limite, para depois construir a estrutura de corpo. Fazemos isso definindo, no conjunto das seqüências de Cauchy, uma "relação de equivalência", assim: duas seqüências de Cauchy (a_n) e (b_n) são *equivalentes* se $(a_n - b_n)$ é uma seqüência nula, isto é, $a_n - b_n \to 0$. Essa relação distribui as seqüências de Cauchy em classes de seqüências equivalentes, de tal maneira que *duas seqüências pertencem a uma mesma classe se, e somente se, elas são equivalentes.*

Cada número racional r está naturalmente associado à classe de seqüências a que pertence a seqüência constante $r_n = r$. Muitas das classes, todavia, escapam a essa associação. Por exemplo, considere a classe à qual pertence a seqüência (2.13). É fácil ver que nenhuma seqüência $r_n = r$, com r racional, pode pertencer a essa classe, senão $r - r_n$ teria de tender a zero, o que é impossível. Essas classes que não contêm seqüências do tipo $r_n = r$ são precisamente aquelas que corresponderão aos números irracionais, a serem criados.

Para criar esses números, definimos, no conjunto das classes de equivalência, as operações de adição e multiplicação, e suas inversas, a subtração e a divisão. Assim, se A e B são classes de equivalência, tomamos elementos representativos em cada uma delas, digamos, (a_n) em A e (b_n) em B e definimos $A + B$ como sendo a classe à qual pertence a seqüência $(a_n + b_n)$. Essa definição exige que provemos que se (a_n) e (b_n) são seqüências de Cauchy, o mesmo é verdade de $(a_n + b_n)$; e que a soma $A + B$ independe das seqüências particulares (a_n) e (b_n) que tomamos em A e B respectivamente.

De maneira análoga definimos: a *classe nula* "0" é a classe das seqüências nulas; o *elemento oposto* $-B$ de uma classe B é a classe das seqüências equivalentes a $(-b_n)$; a *diferença* $A - B$ é simplesmente $A + (-B)$; o produto AB é a classe das seqüências $(a_n b_n)$; o *elemento inverso* B^{-1} de uma classe não nula B é a classe das seqüências equivalentes a $(1/b_n)$; e o *quociente* A/B, onde $B \neq 0$, é o produto AB^{-1}. Se $A \neq 0$, prova-se que se $(a_n) \in A$, então existe um número racional $m > 0$ tal que $a_n > m$ ou $a_n < -m$ a partir de um certo índice N; e sendo isso verdade para uma seqüência, prova-se que é verdade para toda seqüência de A, o que nos leva a definir "$A > 0$" ou "$A < 0$" respectivamente. Definimos "$A > B$" como sendo $A - B > 0$ e $|A| = A$ se $A \geq 0$ e $|A| = -A$ se $A < 0$.

Com todas essas definições e propriedades correlatas estabelecidas, resulta que o conjunto das classes de equivalência das seqüências de Cauchy de números racionais é um corpo ordenado $\mathbf{R}$. Nesse corpo definimos "seqüências de Cauchy" de maneira óbvia e provamos que *toda seqüência de Cauchy de elementos de* $\mathbf{R}$ *é convergente*, isto é, *se* A_n *uma seqüência de Cauchy de elementos de* R, *então existe um elemento* A *de* R *tal que* $A_n \to A$, *ou seja*, $A_n - A \to 0$.

O corpo $\mathbf{R}$ assim construído contém um sub-corpo $\mathbf{Q}'$ isomorfo ao corpo dos números racionais. Esse sub-corpo $\mathbf{Q}'$ é precisamente o conjunto das classes cujos elementos são seqüências equivalentes a seqüências constantes de números racionais $(r, r, r, \ldots)$. Nada mais natural, pois, do que identificar o corpo original dos números racionais $\mathbf{Q}$ com o corpo $\mathbf{Q}'$, um procedimento análogo ao da identificação de cada número racional r com o corte de Dedekind (E, D) que ele define.

A propriedade de que em $\mathbf{R}$ "toda seqüência de Cauchy converge" significa que $\mathbf{R}$ é completo, mesmo porque se tentarmos repetir nesse corpo a mesma construção de classes de

equivalência de seqüências de Cauchy, chegaremos a um novo corpo R' isomorfo a R, portanto, R' nada acrescenta a R. Na verdade, a menos de isomorfismo, só existe um corpo ordenado completo. Portanto R é o mesmo corpo dos números reais construído pelo processo de Dedekind. Aliás, como vimos no Exerc. 17 atrás, a propriedade de que toda seqüência de Cauchy converge é equivalente à propriedade do supremo.

Nessa construção dos números reais por seqüências de Cauchy, cada número racional r é identificado com a classe que contém a seqüência constante $r_n = r$. As classes que escapam a essa identificação correspondem aos elementos novos introduzidos, os *números irracionais*. É esse o caso da classe que contém a seqüência (2.13), e que define $\sqrt{2}$.

O leitor que esteja se expondo a essas idéias pela primeira vez talvez sinta um certo desconforto quando dizemos que um número real, como $\sqrt{2}$, é toda uma classe de seqüências de Cauchy (de números racionais) equivalentes entre si. Na verdade, basta uma só seqüência dessa classe para identificar o número em questão. Assim, a classe que define $\sqrt{2}$ está perfeitamente caracterizada pela seqüência (2.13). E uma breve reflexão há de convencer o leitor de que, pelo menos tacitamente, ele sabe disso há muito tempo, desde que se familiarizou com a idéia de aproximações de um número como $\sqrt{2}$. Esse símbolo nada mais é do que um modo conveniente de designar o conjunto dessas aproximações; é claro que é muito mais fácil escrevê-lo do que escrever uma seqüência que o caracterize. Mas por que preferir a seqüência (2.13) e não a das aproximações decimais por excesso? Ou alguma subseqüência dessas? Ou qualquer outra seqüência a elas equivalente? Como se vê, um pouquinho de reflexão é o bastante para dissipar qualquer desconforto inicial e revelar que $\sqrt{2}$ é mesmo toda uma classe de seqüências equivalentes.

Se essas observações ajudam a dissipar o desconforto inicial do leitor, pode ser que ele ainda não se conforme com essa construção de Cantor dos números reais. Nada mais natural do que perguntar se não bastaria a construção de Dedekind, por mais engenhosa que seja essa de Cantor. De fato, muitas teorias matemáticas — às vezes bem engenhosas — são abandonadas e até esquecidas, por serem suplantadas por outras. Mas não é esse o caso da construção de Cantor. Pelo contrário, esse método das "seqüências de Cauchy" é de grande eficácia em domínios onde a solução de algum problema é obtida por algum tipo de aproximação. Essa solução é então caracterizada por uma seqüência de Cauchy, uma seqüência dos valores aproximados da solução. O Exemplo 2.21 (p. 61) descreve uma situação dessas, relativamente elementar, onde estamos ainda lidando com "números". Mas é freqüente acontecer que a solução de um certo problema seja um objeto mais complicado que um número; por exemplo, um elemento de um conjunto de funções, no qual conjunto exista um modo de medir o distanciamento entre os vários elementos desse conjunto. Isso dá origem, de maneira bastante natural, ao que se chama "espaço métrico". Nesse contexto a noção de seqüência de Cauchy ocorre também naturalmente e é o instrumento adequado para fazer o que se chama "completar o espaço", um processo análogo à construção dos números reais pelo método de Cantor.

Como já dissemos, os métodos de Dedekind e Cantor são os dois mais usados na construção dos números reais. Mas, como vimos nos exercícios atrás, a propriedade dos intervalos encaixados e a propriedade das seqüências monótonas ("toda seqüência não decrescente e limitada converge") são equivalentes à propriedade do supremo e à propriedade das seqüências de Cauchy ("toda seqüência de Cauchy converge"). Isso garante que, além dos métodos de Dedekind e Cantor, poderíamos chegar aos números reais postulando, no conjunto dos números racionais, seja a propriedade dos intervalos encaixados ou a propriedade das seqüências monótonas. Mas, como é fácil ver, isso redundaria numa construção dos números reais praticamente idêntica à de Dedekind.

Bolzano e o teorema de Bolzano-Weierstrass

O critério de convergência de Cauchy aparece pela primeira vez num trabalho de Bolzano de

1817, pouco divulgado; e posteriormente num livro de Cauchy de 1821 (de que falaremos mais nas pp. 97 e 128), que teve grande divulgação e influência no meio matemático.

Bernhard Bolzano (1781–1848) nasceu, viveu e morreu em Praga. Era sacerdote católico que, além de se dedicar a estudos de Filosofia, Teologia e Matemática, tinha grandes preocupações com os problemas sociais de sua época. Seu ativismo em favor de reformas educacionais, sua condenação do militarismo e da guerra, sua defesa da liberdade de consciência e em favor da diminuição das desigualdades sociais custaram-lhe sérios embaraços com o governo. As idéias de Bolzano em Matemática não foram menos avançadas. É até admirável que, vivendo em relativo isolamento em Praga, afastado do principal centro científico da época, que era Paris, e com outras ocupações, ele tenha tido sensibilidade para problemas de vanguarda no desenvolvimento da Matemática. Infelizmente, seus trabalhos permaneceram praticamente desconhecidos até por volta de 1870. Seu trabalho de 1817 (com o longo título de *Prova puramente analítica da afirmação de que entre dois valores que garantem sinais opostos* (de uma função) *jaz ao menos uma raiz da equação* [função]) representa um dos primeiros esforços na eliminação da intuição geométrica das demonstrações. Seu objetivo era provar o teorema do valor intermediário (p. 122) por meios puramente analíticos, sem recorrer à intuição geométrica. E é aí que aparece, pela primeira vez, a proposição que ficaria conhecida como "critério de Cauchy" (veja o comentário sobre Cauchy no final do próximo capítulo), formulado para o caso de uma seqüência de funções, nos seguintes termos:

"Se uma seqüência de grandezas

$$F_1(x),\ F_2(x), \ldots,\ F_n(x), \ldots,\ F_{n+r}(x), \ldots$$

está sujeita à condição de que a diferença entre seu n-ésimo membro $F_n(x)$ e cada membro seguinte $F_{n+r}(x)$, não importa quão distante do n-ésimo termo este último possa estar, seja menor do que qualquer quantidade dada, desde que n seja tomado bastante grande; então, existe uma e somente uma determinada grandeza, da qual se aproximam mais e mais os membros da seqüência, e da qual eles podem se tornar tão próximos quanto se deseje, desde que a seqüência seja levada bastante longe".

Como se vê, essa proposição é o enunciado de uma condição suficiente de convergência da seqüência. A necessidade da condição fora notada por vários matemáticos antes de Bolzano e Cauchy. A demonstração tentada por Bolzano é incompleta; e não podia ser de outro modo, já que ela depende de uma teoria dos números reais, que ainda não estava ao alcance de Bolzano. Ele usa essa condição para demonstrar outra proposição sobre existência de supremo de um certo conjunto, a qual, por sua vez, é usada na demonstração do teorema do valor intermediário. O método de bisseção que Bolzano utiliza na demonstração dessa proposição é também usado por Weierstrass nos anos sessenta para demonstrar o teorema que ficaria conhecido pelos nomes desses dois matemáticos. É interessante notar que praticamente o mesmo enunciado de Weierstrass aparece num trabalho de Bolzano de 1830, *Théorie des fonctions*, só publicado cem anos mais tarde, muito depois de se haver consagrado o nome "teorema de Bolzano-Weierstrass".

Capítulo 3

SÉRIES INFINITAS

Primeiros exemplos

Vamos iniciar nosso estudo das séries infinitas com exemplos simples. Essas séries surgem muito cedo, ainda no ensino fundamental, quando lidamos com dízimas periódicas. Com efeito, uma dízima como $0,777\ldots$ nada mais é do que uma progressão geométrica infinita. Veja:

$$0,777\ldots = 7 \times 0,111\ldots = 7\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\right)$$

$$= 7\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots\right) = 7\left(\frac{1}{1 - 1/10} - 1\right) = 7\left(\frac{10}{9} - 1\right) = \frac{7}{9}.$$

Mas quando se ensinam essas dízimas, não é preciso recorrer às séries infinitas, pode-se usar o procedimento finito que utilizamos no Capítulo 1, assim:

$$x = 0,777\ldots \Rightarrow 10x = 7,777\ldots = 7 + x \Rightarrow 9x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{9}.$$

Voltando às séries infinitas, o que significa "soma infinita"? Como somar um número após outro, após outro, e assim por diante, indefinidamente? Num primeiro contato com séries infinitas, particularmente séries de termos positivos, a idéia ingênua e não crítica de soma infinita não costuma perturbar o estudante. Porém, encarar somas infinitas nos mesmos termos das somas finitas acaba levando a dificuldades séries, ou mesmo a conclusões irreconciliáveis, como bem ilustra um exemplo simples, dado pela chamada "série de Grandi":

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Esta série tanto parece ser igual a zero como igual a 1, dependendo de como a encaramos. Veja:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0.$$

Mas podemos também escrever:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1.$$

E veja o que ainda podemos fazer:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - S,$$

donde a equação $S = 1 - S$, que nos dá $S = 1/2$.

Como decidir então? Afinal, S é zero, 1 ou 1/2?

Para encontrar uma saída para dificuldades como essa que vimos com a série de Gradi, temos de examinar detidamente o conceito de adição. Somar números, sucessivamente, uns após outros, é uma idéia concebida para uma quantidade finita de números a somar. Ao aplicá-la a somas infinitas, por mais que somemos, sempre haverá parcelas a somar; portanto, o processo de somas sucessivas não termina, em consequência, não serve para definir a soma de uma infinidade de números.

O conceito de soma infinita

O conceito de soma infinita é formulado de maneira a evitar um envolvimento direto com a soma de uma infinidade de parcelas. Assim, dada uma série infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{3.1}$$

contentamo-nos em considerar as somas parciais

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \text{etc.}$$

Em geral, designamos por S_n a soma dos primeiros n elementos da seqüência (a_n), que é chamada a *soma parcial* ou *reduzida de ordem n* associada a essa seqüência:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \tag{3.2}$$

Desse modo formamos uma nova seqüência infinita (S_n), que é, por definição, a *série de termos* a_n . Se ela converge para um número S, definimos a *soma infinita* indicada em (3.1) como sendo esse limite:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = S = \lim S_n = \lim \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Esse último símbolo indica a soma da série, ou limite S de S_n. Mas é costume indicar a série (S_n) com esse símbolo mesmo que ela não seja convergente. Freqüentemente usamos também o símbolo simplificado $\sum a_n$ com o mesmo significado. A diferença $S - S_n = R_n$ é apropriadamente chamada o *resto de ordem n* da série. Às vezes, quando consideramos certas séries particulares, a reduzida de ordem n pode não conter exatamente n termos, dependendo do índice n onde começamos a somar. Por exemplo, na série geométrica abaixo começamos a somar em $n = 0$ e a reduzida S_n contém $n + 1$ termos. Dependendo de onde se começa a somar, a reduzida S_n pode conter mais ou menos que n termos.

Como se vê, a noção de série infinita generaliza o conceito de soma finita, pois a série se reduz a uma soma finita quando todos os seus termos, a partir de um certo índice, são nulos. Mas é bom enfatizar que há uma real diferença entre a soma de um número finito de termos e a soma de uma série infinita. Esta última não resulta de somar uma *infinidade* de termos — operação impossível; ela é, isto sim, o *limite* da soma finita S_n.

Propriedades e exemplos

3.1. Teorema. *Se uma série converge, seu termo geral tende a zero.*

Demonstração. Seja $\sum a_n$ uma série de reduzida S_n e soma S. Então, $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$, como queríamos demonstrar.

3.2. Exemplo (série geométrica). De importância fundamental é a *série geométrica de razão* q:

$$1 + q + q^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Sua reduzida S_n é a soma dos termos de uma progressão geométrica:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Supondo $|q| < 1$, q^n tende a zero, de forma que essa expressão converge para $1/(1-q)$, que é o limite de S_n ou soma da série geométrica:

$$1 + q + q^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Notemos que a série é divergente se $|q| \geq 1$, pois neste caso seu termo geral não tende a zero.

O teorema anterior nos dá uma *condição necessária* para a convergência de uma série. Essa condição, todavia, não é *suficiente*. É fácil exibir séries divergentes cujos termos gerais tendem a zero. Por exemplo, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ (Exerc. 9 da p. 55); no entanto, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

é divergente, pois sua reduzida de ordem n é

$$\begin{aligned} S_n &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1, \end{aligned}$$

que tende a $+\infty$.

O exemplo mais notável de série divergente, cujo termo geral tende a zero, é o da chamada "série harmônica", que vamos discutir agora.

3.3. Exemplo. Chama-se *série harmônica* à série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Pelo modo como seu termo geral tende a zero, quem encontra essa série pela primeira vez é inclinado a pensar que ela converge. Foi Nicole Oresme, um matemático do século XIV, quem primeiro provou que ela diverge. (Veja a nota "A divergência da série harmônica" na p. 95.) Oresme começou por agrupar os termos da série assim:

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{32}\right) + \dots \end{aligned}$$

Em seguida ele observou que cada um desses grupos é maior do que $1/2$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = 8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{32} > \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32} = 16 \times \frac{1}{32} = \frac{1}{2};$$

e assim por diante, de sorte que

$$\begin{aligned} S &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + 8 \times \frac{1}{16} + 16 \times \frac{1}{32} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

Como esta última soma é infinita, é claro que a série diverge.

Para tornar esse raciocínio um pouco mais formal, observamos que todos os termos da série são positivos, de forma que suas reduzidas formam uma seqüência

crescente. Basta, pois, exibir uma subseqüência de reduzidas tendendo a infinito. É esse o caso da subseqüência

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots \\ &+ \left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1+\frac{1}{2}+\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{2^{j-1}+1}+\frac{1}{2^{j-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^j}\right). \end{aligned}$$

Substituindo os denominadores de cada um dos termos deste último parênteses por 2^j, obtemos

$$S_{2^n} \geq 1+\frac{1}{2}+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{2^j}(2^j-2^{j-1}) = 1+\frac{n}{2},$$

que prova o resultado anunciado.

3.4. Teorema (Critério de Cauchy para séries). *Uma condição necessária e suficiente para que uma série $\sum a_n$ seja convergente é que dado qualquer $\varepsilon > 0$, exista N tal que, para todo inteiro positivo p,*

$$n > N \Rightarrow |a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Este teorema é uma simples adaptação do Teorema 2.12 da p. 57 à seqüência de somas parciais S_n. Basta notar que

$$|S_{n+p}-S_n| = |a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|.$$

3.5. Teorema. *Se as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem e k é um número qualquer, então $\sum ka_n$ e $\sum(a_n+b_n)$ convergem e*

$$\sum ka_n = k\sum a_n \quad \text{e} \quad \sum(a_n+b_n) = \sum a_n + \sum b_n.$$

Este teorema é uma conseqüência imediada de propriedades análogas já estabelecidas para seqüências (Teorema 2.8, p. 52). Dele segue, em particular, que se verificarmos a convergência de uma série, considerada somente a partir de um certo índice N, então a série toda é convergente e vale a igualdade

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_N + \sum_{n=1}^{\infty} a_{N+n},$$

que decorre da seguinte observação:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim S_n = \lim(S_N + a_{N+1} + \ldots + a_{N+n}) \\ &= \lim S_N + \lim(a_{N+1} + \ldots + a_{N+n}) = S_N + \sum_{n=1}^{\infty} a_{N+n}.\end{aligned}$$

Séries de termos positivos

Suponhamos que $\sum p_n$ seja uma série de termos positivos (ou não negativos). Então, a seqüência de somas parciais

$$S_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n,$$

é não decrescente. Em conseqüência, a série converge ou diverge para $+\infty$, conforme essa seqüência seja limitada ou não.

Suponhamos que os termos da série sejam reindexados numa outra ordem qualquer,

$$p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_n + \ldots$$

Assim, p'_1 pode ser, digamos, o elemento p_5 , p'_2 pode ser p_9, p'_3 pode ser p_1 etc. Então, como os termos são todos não negativos, a nova soma parcial,

$$S'_n = p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_n$$

será dominada por alguma soma parcial S_m com $m > n$. Se a série original converge para S, teremos $S'_n \leq S_m \leq S$, isto é, as somas parciais S'_n formam uma seqüência não decrescente e limitada, portanto, convergente. Seu limite S' é seu supremo, de sorte que $S' \leq S$. Mas a série original também pode ser interpretada como obtida de $\sum p'_n$ por reindexação, portanto, o mesmo raciocínio nos leva a $S \leq S'$. Provamos assim o teorema que enunciamos a seguir.

3.6. Teorema. *Uma série convergente de termos não negativos possui a mesma soma, independentemente da ordem de seus termos.*

É fácil ver também que se a série diverge, ela será sempre divergente para $+\infty$, independentemente da ordem de seus termos.

A noção de "série convergente, independentemente da ordem de seus termos" pode ser formalizada facilmente. Basta notar que mudar a ordem dos termos corresponde a fazer uma "permutação infinita" desses termos, através de uma *bijeção* ou *correspondência biunívoca* de **N** sobre **N**. (Veja a definição desses conceitos na p. 102.) Seja f uma tal bijeção e ponhamos $p'_n = p_{f(n)}$.

Diz-se então que a *série* $\sum p_n$ *é comutativamente convergente se for convergente a série* $\sum p'_n = \sum p_{f(n)}$ *e* $\sum p'_n = \sum p_n$, *qualquer que seja a bijeção* f.

Exercícios

1. Dada a seqüência S_n de reduzidas de uma série, construa a seqüência original de termos a_n da série.
2. Dada uma série convergente $\sum a_n$, com soma S e reduzida S_n, prove que seu resto R_n é a soma da série a partir do índice $n+1$.
3. Chama-se *série harmônica*, em geral, toda série cujos inversos de seus termos formam uma progressão aritmética, isto é, toda série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+nr}, \quad r \neq 0.$$

Demonstre que uma tal série é divergente.

4. Obtenha a reduzida da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ e mostre que seu limite (soma da série) é 1.
5. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \frac{1}{a}$.
6. O termo geral da série $\sum \log(1+1/n)$ tende a zero. Mostre, todavia, que ela é divergente, obtendo uma forma simples para sua reduzida S_n .
7. Dada uma série convergente $\sum a_n$ e uma seqüência crescente de números naturais $n_1 < n_2 < \ldots$, defina

$$b_1 = a_1 + \ldots + a_{n_1}, \quad b_2 = a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2},$$
$$b_3 = a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3} \text{ etc.}$$

Prove que a série $\sum b_n$ converge e tem a mesma soma que a série original.

8. Use o critério de Cauchy para provar que o termo geral de uma série convergente tende a zero.
9. Use o critério de Cauchy para provar que $\sum a_n$ converge se $\sum |a_n|$ converge.
10. Calcule a reduzida S_n da série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$ e mostre que seu limite é 1.
11. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n(n+1)} = 1 - 3(\log 2)$, sabendo que $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
12. Calcule a soma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+5)}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2}$.
13. Mostre que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n-1}{n!}$ tem soma igual a 2.

Respostas, sugestões e soluções

1. $a_1 = S_1, \quad a_n = S_n - S_{n-1}, \; n \geq 2$.

2. Utilize o Teorema 3.5. Ou faça diretamente: pela definição que demos de resto, $R_n = S - S_n$. Por outro lado,

$$S = \lim_{m\to\infty}(S_n + \sum_{j=1}^{m} a_{n+j}) = S_n + \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} a_{n+j}.$$

Daqui e de $S = R_n + S_n$, concluímos que $R_n = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} a_{n+j} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{n+j}$.

3. Se $a > 0$ e $r > 0$, mostre que o termo geral da série pode ser feito maior do que uma constante vezes $1/n$. No caso geral, trabalhe com os termos a partir de um certo índice, a partir do qual todos os termos tenham o mesmo sinal.

4. Observe que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

11. Proceda como no Exerc. 4, mostrando que $a_n = (-1)^n\left(\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$.

12. Mostre que $a_n = (-1)^n\left(\dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3}\right)$.

Teste de comparação

Um dos problemas centrais no estudo das séries consiste em saber se uma dada série converge ou não. Há vários testes para isso, dentre os quais o *teste de comparação*, tratado a seguir, é o mais básico.

3.7. Teorema (teste de comparação). *Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries de termos não negativos, a primeira dominada pela segunda, isto é, $a_n \le b_n$ para todo n. Nessas condições podemos afirmar:*

a) $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge e $\sum a_n \le \sum b_n$;

b) $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge.

Demonstração. As reduzidas das séries dadas,

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \text{ e } T_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

são seqüências não decrescentes, satisfazendo $S_n \le T_n$. No caso a), T_n converge para um certo limite T, de sorte que $S_n \le T$ para todo n. Assim, como S_n é uma seqüência não decrescente e limitada, ela converge para um certo $S \le T$.

A demonstração de b) exige muito pouco: se $\sum b_n$ convergisse, então, por a), $\sum a_n$ também teria de convergir, contrariando a hipótese.

Outra demonstração (pelo critério de Cauchy). Observe que

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \le b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p}.$$

Se $\sum b_n$ converge, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que o membro da direita dessa desigualdade pode ser feito menor do que ε para $n > N$. Então o mesmo

é verdade do primeiro membro, provando que $\sum a_n$ converge. A demonstração da parte b) é a mesma anterior.

3.8. Exemplo. Já vimos, em (2.9) (p. 58), que o número e é dado por

$$e = \lim\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Um modo de provar a convergência dessa série, independentemente do que vimos antes, consiste em observar que

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \ldots n} \leq \frac{1}{2 \cdot 2 \ldots 2} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

donde segue que, à exceção do primeiro termo, a série dada é dominada pela série geométrica de razão $1/2$, que é convergente; logo, a série original é convergente.

Irracionalidade do número e

Para provarmos que o número e é irracional, vamos primeiro obter uma estimativa do erro R_n que cometemos no cálculo desse número quando o aproximamos pela soma parcial S_n da série anterior (que vai até o termo $1/n!$). Temos

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + (n+2)^{-1} + (n+2)^{-2} + \ldots\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

Podemos então escrever: $S_n < e < S_n + 1/n!n$.

Se e fosse racional, isto é, se $e = m/n$, com m e n inteiros positivos, $n \geq 2$ (pois, como já sabemos, e não é inteiro), então

$$S_n < \frac{m}{n} = S_n + R_n < S_n + \frac{1}{n!n},$$

donde segue-se que $n!S_n < m(n-1)! < n!S_n + \dfrac{1}{n} < n!S_n + 1$. Ora, o número $n!S_n$ é inteiro, pois é igual a

$$n!\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \frac{1}{n!}\right) = 2n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \ldots \frac{n!}{n!}.$$

Então a desigualdade anterior está afirmando que o número inteiro $m(n-1)!$ está compreendido entre os inteiros consecutivos $n!S_n$ e $n!S_n + 1$, um absurdo. Concluímos que o número e é irracional.

Pelo que vimos acima, S_n é uma aproximação do número e com erro inferior a $(1/n)(1/n!)$. Como $n!$ cresce muito rapidamente com n, S_n é realmente uma

boa aproximação de e, mesmo para n não muito grande. Por exemplo, $n = 10$ já nos dá um erro inferior a 10^{-7}. Euler calculou o número e com 23 casas decimais, obtendo $e = 2,71828182845904523536028$.

3.9. Exemplo. Mostraremos agora que a série $\sum 1/n^x$ é convergente se $x > 1$ e divergente se $x \leq 1$. Este último caso é o mais fácil, pois então a série dada majora a série harmônica, visto que $x \leq 1 \Rightarrow n^x \leq n$, logo, $1/n^x \geq 1/n$.

Suponhamos agora que $x > 1$. Usaremos um raciocínio parecido com o que usamos no caso da série harmônica. Temos:

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}-1} &= 1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2^{jx}} + \frac{1}{(2^j+1)^x} + \ldots + \frac{1}{(2^{j+1}-1)^x} \right) \\ &< 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{jx}} (2^{j+1} - 2^j) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{(x-1)j}} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2^{x-1}} \right)^j < \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{x-1}} \right)^j = \frac{2^{x-1}}{2^{x-1}-1}. \end{aligned}$$

Vemos assim que a seqüência de reduzidas da série dada, que é uma seqüência crescente, possui uma subseqüência limitada, portanto convergente. Concluímos que a seqüência de reduzidas converge para o mesmo limite (Exerc. 1 da p. 62). Isso prova que a série original é convergente, como queríamos demonstrar.

O exemplo que acabamos de discutir nos mostra que a série harmônica está compreendida entre as séries convergentes $\sum 1/n^x$ com $x > 1$ e as séries divergentes $\sum 1/n^x$ com $x \leq 1$, situando-se, ela mesma, entre estas últimas.

É claro que a série $\sum 1/n^x$ define uma função de x, a qual é chamada *função zeta de Riemann*:

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}. \tag{3.3}$$

Embora conhecida por Euler (1707–1783) desde 1737, suas propriedades mais notáveis só vieram a ser descobertas por Riemann (1826–1866) em 1859, num memorável trabalho sobre teoria dos números.

Ao lado da série geométrica, a série (3.3) é muito usada como referência para testar se uma dada série converge ou diverge. Isso é possível quando o termo geral da série dada comporta-se como $1/n^x$ para n tendendo a infinito.

3.10. Exemplo. A série

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é evidentemente convergente e representa o valor $\zeta(2)$. Euler mostrou que a soma dessa série é $\pi^2/6$.[1] Vamos provar apenas que $1 < \sum 1/n^2 < 2$. Para isso observamos que

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}.$$

Nesta última série fazemos a mudança $n - 1 = m$, donde $n = m + 1$. Então,

$$1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} = 2,$$

que é o resultado desejado.

O teste de comparação é muito usado para verificar a convergência de séries cujos termos gerais a_n são complicados, mas para os quais é relativamente fácil verificar que $a_n \leq b_n$, sendo b_n o termo geral de uma série convergente. Essa situação é ilustrada no exemplo seguinte.

3.11. Exemplo. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{15n + \sqrt{n^2-1}}{5n^3 + 2n\sqrt{n+1} - 17}$ é convergente. Para vermos isso notamos que seu termo geral a_n é tal que

$$n^2 a_n = \frac{15n^3 + n^2\sqrt{n^2-1}}{5n^3 + 2n\sqrt{n+1} - 17} \to \frac{16}{5}.$$

de sorte que (Teorema 2.6, p. 52), a partir de um certo índice N, teremos $2 < n^2 a_n < 4$; logo, a partir desse índice N, a série é positiva e dominada pela série de termo geral $4/n^2$. Como esta série é convergente, também o é a série original.

3.12. Exemplo. Usaremos o teste de comparação na ordem inversa para provar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n+1}}{n^2 - 3}$$

é divergente. Para isso basta notar que, sendo a_n o termo geral da série, então $\sqrt{n}a_n \to 1$, de sorte que, a partir de um certo N, $a_n > 1/2\sqrt{n}$ e este número é o termo geral de uma série divergente.

3.13. Exemplos. Mostraremos que, sendo k inteiro positivo e $a > 1$, as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}. \tag{3.4}$$

[1] Veja nosso artigo na *Revista Matemática Universitária*, Nº 3, Junho de 1986).

são convergentes. De fato, pelo que vimos no Exemplo 2.18 (p. 60), $n^{k+2}/a^n \to 0$, de sorte que $n^k/a^n < 1/n^2$ a partir de um certo N. Isso prova que a primeira das séries em (3.4) é convergente por ser dominada, a partir de N, pela série convergente $\sum 1/n^2$.

No Exemplo 2.19 provamos que $a^n/n! < c/2^n$, o que mostra que a segunda das séries em (3.4) é convergente por ser dominada pela série convergente $\sum c/2^n$.

Finalmente observe que, sendo $n > 2$,

$$\frac{n!}{n^n} = \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n}\right)\frac{3}{n} \cdot \frac{4}{n} \cdots \frac{n}{n} < \frac{2}{n^2},$$

e aqui também podemos concluir que a terceira das séries em (3.4) é convergente.

Exercícios

1. Prove que se $\sum a_n$ é uma série convergente de termos positivos, então $\sum a_n^2$ é convergente.
2. Sejam $\sum a_n$ uma série convergente de termos positivos e (b_n) uma seqüência limitada de elementos positivos. Prove que $\sum a_n b_n$ converge.
3. Sendo $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$, prove que, se as séries $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ são convergentes, então a série $\sum a_n b_n$ também é convergente.
4. Prove que se $a_n \geq 0$ e $\sum a_n^2$ converge, então $\sum a_n/n$ converge.
5. Verifique, dentre as séries seguintes, qual delas converge, qual delas diverge:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 23n + 9}{4n^3\sqrt{n+7} - 2n + \cos^3 n^2}$; f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \operatorname{sen}^2 3n}{2^n + n^2 + 1}$; g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^k}$;

h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$; i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}\log n}$; j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$; k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

6. Sejam $p_k(n)$ e $p_r(n)$ polinômios em n de graus k e r respectivamente. Prove que se $r - k \geq 2$ a série $\sum p_k(n)/p_r(n)$ é convergente, e se $r - k \leq 1$ ela é divergente.
7. Sendo $a > b > 0$, mostre que a série de termo eral $a_n = (a^n - b^n)^{-1}$ é convergente se $a > 1$ e divergente se $a \leq 1$.
8. Supondo $a_n \geq 0$ e $a_n \to 0$, prove que $\sum a_n$ converge ou diverge se, e somente se, $\sum a_n/(1 + a_n)$ converge ou diverge, respectivamente.
9. Prove que, se $a_n \geq 0$ e $\sum a_n$ converge, então $\sum a_n^2/(1 + a_n^2)$ converge. Construa um exemplo em que a primeira dessas séries diverge e a segunda converge; e outro exemplo em que ambas divergem.
10. Prove que, sendo $c > 0$, a série $\sum \operatorname{sen}(c/n)$ é divergente.

11. Prove que se (a_n) é uma seqüência não crescente e $\sum a_n$ converge, então $na_n \to 0$. Isso pode não ser verdade se (a_n) oscilar, como ilustra o exercício seguinte. Observe que a condição $na_n \to 0$ não é suficiente para a convergência da série; um contra-exemplo é a série $\sum 1/(n \log n)$, que é divergente. (Veja o Exemplo 3.18, p. 89).

12. Construa uma série convergente de termos positivos $\sum a_n$ tal que na_n não tenda a zero.

Sugestões

3. $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2$.

4. Conseqüência de um dos dois exercícios anteriores.

5. a) e b) dominam a série harmônica. Em c) e e), $n^{3/2}a_n \to c > 0$. Algo parecido em d). Em f), $0 < 2^n a_n < 2 + |\text{sen}^2\, 3n| < 3$, logo, $a_n < 3/2^n$. g) Diverge. Observe que se $k > 0$, $\log n < n^{1/k}$ a partir de um certo N. h) Converge, pois $\log n > 2$ a partir de certo N. i) Converge. No caso da série em k), observe que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

7. $(a^n - b^n)^{-1} = (1/a)^n[1 - (b/a)^n]^{-1}$.

11. Sendo S a soma da série, $S_{2n} - S_n = a_{n+1} + \ldots + a_{2n} \geq na_{2n}$. Isso permite provar o resultado desejado para n par. Para n ímpar observe que $(2n+1)a_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n}$.

12. Tome uma série convergente (por exemplo, $\sum q^n$, com $0 < q < 1$) e substitua por $1/n$ uma infinidade de seus termos a_n, tomados cada vez mais espaçadamente para não destruir a convergência (por exemplo, substitua os termos de ordem $n = k^2$ por $1/n = 1/k^2$).

Teste da razão

Uma importante conseqüência do teste de comparação é o chamado *teste da razão* ou *teste de d'Alembert* que consideramos a seguir.

3.14. Teorema (teste da razão). *Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos tal que existe o limite L do quociente a_{n+1}/a_n. Então, a série é convergente se $L < 1$ e divergente se $L > 1$, sendo inconclusivo o caso em que $L = 1$.*

Demonstração. Seja c um número compreendido entre L e 1. Supondo $L < 1$, esse número c também será menor que 1. A partir de um certo índice N teremos $a_{n+1}/a_n < c$, ou seja, $a_{n+1} < a_n c$. Daqui obtemos as desigualdades

$$a_{N+1} < a_N c,\ a_{N+2} < a_{N+1}c < a_N c^2,\ a_{N+3} < a_{N+2}c < a_N c^3, \ldots;$$

em geral, $a_{N+j} < a_N c^j$, $j = 1, 2, \ldots$. Isso mostra que a partir do índice $N+1$ a série dada é majorada pela série geométrica $a_N \sum c^j$, que é convergente, pois $0 < c < 1$. Então a série original também é convergente, pelo teste de comparação.

O raciocinio, no caso $L > 1$, é mais simples ainda, pois então, a partir de um certo N, $a_{N+1} > a_N$, $a_{N+2} > a_{N+1} > a_N$; em geral, $a_{N+j} > a_N$, provando que o termo geral a_{N+j} não tende a zero, logo a série diverge.

A demonstração do teorema deixa claro que nem precisa existir o limite nele referido; basta que, a partir de um certo índice N, tenhamos sempre $a_{n+1}/a_n \leq c < 1$ ou sempre $a_{n+1}/a_n \geq 1$.

3.15. Corolário. *A série de termos positivos $\sum a_n$ é convergente se a partir de um certo índice vale sempre $a_{n+1}/a_n \leq c < 1$; e divergente se a partir de um certo índice vale sempre $a_{n+1}/a_n \geq 1$.*

3.16. Exemplos. A convergência de cada uma das três séries dadas em (3.4) (p. 85) pode ser estabelecida facilmente pelo teste da razão, sem precisar descobrir de antemão como os termos dessas séries tendem a zero. Aliás, provando-se, pelo teste da razão, que essas séries convergem, teremos provado o resultado (2.10) (p. 61). Consideremos, como ilustração, a terceira das séries em (3.4), para a qual $a_n = n!/n^n$, logo,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{(1+1/n)^n} \to \frac{1}{e} < 1,$$

donde segue a convergência da série. O cálculo desse limite no caso das outras duas séries resulta em $1/a$ e zero, respectivamente; é um cálculo fácil, como o leitor pode verificar.

Observe que o teste da razão nada nos diz se $\lim a_{n+1}/a_n = 1$. É o que acontece no caso das séries $\sum 1/n$ e $\sum 1/n^2$, a primeira divergente e a segunda convergente. Em ambos os casos a_{n+1}/a_n tem limite 1; no entanto, a primeira diverge e a segunda converge.

Exercícios

Teste cada uma das séries seguintes, verificando se converge ou não:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^b a^n$, $0 < a < 1$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2^{n^2}}$, $a > 0$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 a^n}{2^{n^2}}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!(1-\cos n^2)}{2.5.8\ldots(3n-1)}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!(2+\operatorname{sen} n^2)}{3.5.7\ldots(2n-1)}$.
8. Dada uma série convergente de termos positivos $\sum a_n = S$, prove que, se a partir de um certo índice N, $a_{n+1}/a_n \leq q < 1$, então $S - S_n < a_N q^{n+1-N}/(1-q)$ para $n > N$.

9. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos, esta última convergente. Suponhamos que exista N tal que $n > N \Rightarrow a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$. Prove que $\sum a_n$ converge.
10. Obtenha a primeira parte do Teorema 3.14 como conseqüência do exercício anterior.

Sugestões

1. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = (1+1/n)^b a.$ 2. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}.$ 3. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}.$

4. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{n^2}a}{2^{(n+1)^2}} = \dfrac{a}{(2n+1)}.$

5. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a[(n+1)!]^2 2^{n^2}}{(n!)^2 2^{(n+1)^2}} = \dfrac{a(n+1)^2}{2^{(2n+1)}}.$

6. $0 < a_n \leq \dfrac{2^n n!}{5.8\ldots(3n-1)} = b_n, \quad \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{2(n+1)}{3n+2} \to \dfrac{2}{3}.$

7. $a_n \geq \dfrac{3^n n!}{5.7\ldots(2n-1)} = b_n, \quad \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{3(n+1)}{2n+1} \to \dfrac{3}{2}.$

9. Escreva a desigualdade do enunciado para os índices N, $N+1, \ldots, n$ e multiplique, membro a membro, as desigualdades obtidas.
10. Sendo $L < c < 1$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq c \leq \dfrac{c^{n+1}}{c^n}$, a partir de um certo N.

O teste da integral

Um outro teste de convergência de séries de muita utilidade é o chamado teste da integral, porque baseado na comparação da série com a integral de uma função.

3.17. Teorema. *Seja $f(x)$ uma função positiva, decrescente e $a_n = f(n)$. Então*

$$f(2) + \ldots + f(n) < \int_1^n f(x)dx < f(1) + \ldots + f(n-1). \tag{3.5}$$

Em conseqüência, a série $\sum a_n$ converge ou diverge, conforme a integral que aí aparece seja convergente ou divergente, respectivamente, com $n \to \infty$.

Demonstração. Imediata, pois a desigualdade em (3.6) é obtida da soma de

$$f(j) < \int_{j-1}^{j} f(x)dx < f(j-1),$$

j variando de 2 a n.

3.18. Exemplos. A série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ é divergente, pois

$$\int_2^n \frac{dx}{x \log x} = \log\log x \Big|_2^n \to \infty.$$

É interessante observar que se aumentarmos, por pouco que seja, o logaritmo no denominador, obteremos uma série convergente. Assim, dado $\varepsilon > 0$ por pequeno que seja,

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\log\ x)^{1+\varepsilon}} = \frac{-1}{\varepsilon(\log x)^{\varepsilon}}\Big|_2^n \to \frac{1}{\varepsilon(\log 2)^{\varepsilon}},$$

donde concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}}$ é convergente.

Exercícios

1. Use o teste da integral para mostrar que a série harmônica é divergente.
2. Faça o mesmo para mostrar que a série $\sum 1/n^x$ é convergente se $x > 1$ e divergente se $x < 1$.
3. Estabeleça as seguintes desigualdades:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2; \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{\pi}{2}; \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{3}{2}.$$

4. Mostre, pelo teste da integral, que as séries seguintes são convergentes:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}; \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}; \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}; \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{-n}.$$

   Neste último exemplo k é um número real qualquer.

5. Estabeleça a convergência da série $\sum(e/n)^n$ e prove a convergência da integral

$$\int_1^{\infty} (e/x)^x dx.$$

6. Estabeleça a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log\ n}}$.
7. Sendo $f(x)$ uma função crescente em $x \geq 1$, prove que

$$f(1) + \ldots + f(n-1) < \int_1^n f(x)dx < f(2) + \ldots + f(n).$$

8. Fazendo $f(x) = \log x$ no exercício anterior, prove que

$$e^{1-n} < \frac{n!}{n^n} < ne^{1-n},$$

   donde segue, em particular, que $\sqrt[n]{n!}/n \to 1/e$.
9. Verifique que o teste da razão não permite saber se a série $\sum e^n n!/n^n$ converge ou não. Prove que esta série é divergente, usando o resultado do exercício anterior.

Sugestões

3. Integre, em cada caso, uma função $f(x)$ apropriada.

5. A convergência da série pode ser obtida como conseqüência da convergência das duas últimas séries em (3.4) (p. 85), pois $(e/n)^n = (e^n/n!)(n!/n^n)$.
6. Basta provar que é convergente a integral, de 2 a ∞, da função

$$f(x) = (\log x)^{-\log x} = e^{-(\log x)\log\log x} = e^{-g(x)},$$

onde $g(x)$ tem significado óbvio. (É fácil verificar que $f(x)$ é decrescente a partir de um certo x_0, pois $g'(x) = x^{-1}(\log\log x + 1) > 0$ a partir de um certo x_0.) Para isso fazemos a substituição $y = \log x$, donde

$$\int_2^\infty f(x)dx = \int_{\log 2}^\infty (e/y)^y dy,$$

integral esta que sabemos ser convergente pelo exercício anterior.

Convergência absoluta e condicional

Diz-se que uma série $\sum a_n$ *converge absolutamente*, ou é *absolutamente convergente*, se a série $\sum |a_n|$ é convergente. Pode acontecer, como veremos adiante, que $\sum a_n$ seja convergente e $\sum |a_n|$ divergente, em cujo caso dizemos que a série $\sum a_n$ é *condicionalmente convergente*.

3.19. Teorema. *Toda série absolutamente convergente é convergente. Mais do que isso, é comutativamente convergente, isto é, a soma da série dada independe da ordem de seus termos.*

Demonstração. Sejam p_r a soma dos termos $a_r \geq 0$ e q_r a soma dos valores absolutos dos termos a_r negativos, onde, em ambos os casos, $r \leq n$. Então, as reduzidas das séries $\sum |a_n|$ e $\sum a_n$ são dadas por

$$T_n = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| = p_n + q_n \tag{3.6}$$

e

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = p_n - q_n, \tag{3.7}$$

respectivamente. As seqüências (T_n), (p_n) e (q_n) são não decrescentes, a primeira das quais converge, por hipótese. Seja T seu limite. Temos que $p_n \leq T_n \leq T$ e $q_n \leq T_n \leq T$, donde concluímos que (p_n) e (q_n) convergem. Sejam p e q seus respectivos limites. Então S_n também converge: $S_n = p_n - q_n \to p - q$. Isso completa a demonstração da primeira parte do teorema.

Para ver que a soma da série dada independe da ordem de seus termos, basta notar que p_n e q_n são reduzidas de séries de termos não negativos, e as somas dessas séries independem da ordem em que se considerem seus termos, como vimos no Teorema 3.6 (p. 80).

Outro modo de provar a convergência da série utiliza o critério de Cauchy. Para isso observamos que

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}|.$$

Ora, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um índice N tal que $n > N$ acarreta esta última soma ser menor do que ε, logo, o mesmo acontece com a primeira.

3.20. Exemplo. Vamos provar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 3n^2}{n^2 - \sqrt{n+9}}$$

é absolutamente convergente. Para isso observamos que a partir de $n = 2$ o denominador é positivo e

$$n^2|a_n| = \frac{n^2|\operatorname{sen} 3n^2|}{n^2 - \sqrt{n+9}} \leq \frac{n^2}{n^2 - \sqrt{n+9}} \to 1,$$

de sorte que, a partir de um certo N, $n^2|a_n| < 2$ e isso prova que $\sum |a_n|$ é convergente.

Séries alternadas e convergência condicional

Diz-se que uma série é *alternada* quando seus termos têm sinais alternadamente positivos e negativos. Para essas séries vale a recíproca do Teorema 3.1 (p. 77), desde que o valor absoluto do termo geral tenda a zero *decrescentemente*. É o que veremos a seguir.

3.21. Teorema (teste de Leibniz). *Seja (a_n) uma seqüência que tende a zero decrescentemente, isto é, $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$, $a_n \to 0$. Então, a série alternada $\sum(-1)^{n+1}a_n$ converge. Além disso, o erro que se comete tomando-se uma reduzida qualquer da série como valor aproximado de sua soma é, em valor absoluto, menor ou igual ao primeiro termo desprezado.*

Demonstração. Consideremos separadamente as reduzidas de ordem par e de ordem ímpar da série dada, as quais podem ser escritas assim:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

e

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

por onde vemos claramente que (S_{2n}) é não decrescente e (S_{2n+1}) é não crescente. Além disso, $S_{2n} = S_{2n+1} - a_{2n+1} \leq S_{2n+1} \leq a_1$, isto é, (S_{2n}) é não decrescente e limitada, portanto, convergente para um certo número S. Este é também o limite da seqüência de reduzidas de ordem ímpar, como se vê passando ao limite em $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$. Concluímos que a seqüência (S_n) converge para o mesmo número S (Exerc. 3 da p. 62).

Quanto ao erro, observe que as desigualdades

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1} \quad \text{e} \quad S_{2n+2} \leq S \leq S_{2n+1}$$

nos dão:

$$0 \leq S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$$

e

$$0 \leq S_{2n+1} - S \leq S_{2n+1} - S_{2n+2} = a_{2n+2}.$$

Isso prova que $|S_n - S| \leq a_{n+1}$ para todo n e conclui a demonstração.

3.22. Exemplo. A série harmônica alternada,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

é convergente, pelo teorema anterior; portanto, condicionalmente convergente, pois a série de módulos, $\sum 1/n$, é a série harmônica que, como sabemos, diverge.

As séries condicionalmente convergentes são, por natureza, vagarosas no convergir. A mudança da ordem de seus termos muda a soma da série e pode mudar tanto que é possível reordenar convenientemente os termos da série para que sua soma seja qualquer número dado de antemão. Esse surpreendente resultado, que discutiremos a seguir, é descrito e demonstrado por Riemann em um de seus trabalhos.

3.23. Teorema. *Se uma dada série $\sum a_n$ é condicionalmente convergente, seus termos podem ser reordenados de maneira que a série convirja para qualquer número S que se prescreva.*

Demonstração. Com a mesma notação do Teorema 3.19, como $T_n \to \infty$, vemos, por (3.6), que o mesmo ocorre com p_n ou q_n. Mas S_n converge, logo, por (3.7), ambos p_n e q_n tendem a infinito. Agora é fácil ver como reordenar os termos da série para que sua soma seja S: da seqüência $a_1, a_2, \ldots$ vamos tirando elementos positivos, na ordem em que aparecem, e somando-os até obtermos um número maior do que S; em seguida vamos adicionando a esse resultado elementos negativos até obtermos uma soma menor do que S; e voltamos a adicionar elementos positivos, depois negativos, e assim por diante. Como a série original converge, $a_n \to 0$, de sorte que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que $n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$. Ora, o reordenamento descrito produz uma série

$$a'_1 + a'_2 + a'_3 + \ldots + a'_n + \ldots,$$

cujas reduzidas S'_j têm a seguinte propriedade: existe J tal que, sendo $j > J$, S'_j incorpora todos os elementos da série original com índices que vão de 1 até $N+1$, de forma que o último elemento da série original que aparece em S'_j tem índice $n_j > N$; logo, tem valor absoluto menor do que ε. E foi esse elemento que fez

a soma S'_j ultrapassar o número S, seja para a direita ou para a esquerda, de sorte que $|S'_j - S| < |a_{n_j}|$. Assim, podemos concluir que

$$j > J \Rightarrow |S'_j - S| < \varepsilon,$$

e isso completa a demonstração do teorema.

Deste último teorema e do Teorema 3.19 segue facilmente o corolário que enunciamos a seguir.

3.24. Corolário. *Uma condição necessária e suficiente para que uma série seja comutativamente convergente é que ela seja absolutamente convergente.*

Os resultados sobre séries aqui discutidos são os mais freqüentemente usados. Porém, muitos outros existem, principalmente testes de convergência.

Exercícios

Verifique, em cada um dos exercícios seguintes, se a série dada é convergente; e, em sendo, se absoluta ou condicionalmente.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n^2+1}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$;

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k - \operatorname{sen} k}{k\sqrt{k}}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}(2+\sqrt{n})}$;

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!e^{-n} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$;

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 (n!)^{-1/2} \operatorname{sen}(1/3n)$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2^n - (-3)^n]}{(2n)! - n!}$;

10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! \operatorname{sen} k}{1.3.5\ldots(2k-1)}$;

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cos n$;

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(\cos n)}{(n!)^3}$;

Notas históricas e complementares

A origem das séries infinitas

A possibilidade de representar funções por meio de séries infinitas, particularmente séries de potências, foi percebida desde o início do desenvolvimento do Cálculo no século XVII, tendo-se constituído num dos mais poderosos estímulos a esse desenvolvimento.

Mas as séries infinitas são conhecidas desde a antiguidade. A primeira a ocorrer na História da Matemática é uma série geométrica de razão 1/4, que intervém no cálculo da área da parábola, feito por Arquimedes. Seguindo a tradição grega de evitar o infinito, pelas dificuldades lógicas que esse conceito pode trazer em seu bojo, Arquimedes não soma todos os termos da referida série; ele observa que a soma de uma certa quantidade à reduzida de ordem n produz uma quantidade independente de n, que é a soma da série.[2]

Depois dessa ocorrência de uma série geométrica num trabalho de Arquimedes, as séries infinitas só voltariam a aparecer na Matemática cerca de 1.500 anos mais tarde, no século XIV. Nessa época havia um grupo de matemáticos na Universidade de Oxford que estudava a cinemática, ou fenômeno do movimento. Foi esse estudo que levou à reconsideração das séries infinitas. E foi então que se descobriu que o termo geral de uma série pode tender a zero sem que a série seja convergente. Isto ocorreu em conexão com a série harmônica e a descoberta foi feita por Nicole Oresme, de quem falaremos logo adiante.

A divergência da série harmônica

A divergência da série harmônica é um fato notável, que jamais seria descoberto experimentalmente. De fato, se fôssemos capazes de somar cada termo da série em um segundo de tempo, como um ano tem aproximadamente $365,25 \times 24 \times 60 \times 60 = 31.557.600$ segundos, nesse período de tempo seríamos capazes de somar a série até $n = 31.557.600$, obtendo para a soma um valor pouco superior a 17; em 10 anos a soma chegaria a pouco mais de 20; em 100 anos, a pouco mais de 22. Como se vê, esses números são muito pequenos para indicar divergência da série; não somente isso, mas depois de 100 anos já estaríamos somando algo muito pequeno, da ordem de 3×10^{-9}. É claro também que é impossível efetuar essas somas para valores tão grandes de n.

Vamos fazer mais um exercício de imaginação. Hoje em dia temos computadores muito rápidos, e a tecnologia está produzindo máquinas cada vez mais rápidas. Mas isso tem um limite, pois, como sabemos, nenhum sinal físico pode ser transmitido com velocidade superior à da luz. Portanto, nenhum computador poderá efetuar uma soma em tempo inferior a 10^{-23} segundos, que é o tempo gasto pela luz para percorrer distância igual ao diâmetro de um elétron. Pois bem, com tal computador, em um ano, mil anos e um bilhão de anos, respectivamente, poderíamos somar termos em números iguais a

$$315.576 \times 10^{25}, \quad 315.576 \times 10^{28} \quad \text{e} \quad 315.576 \times 10^{34}.$$

E veja os resultados aproximados que obteríamos para a soma da série harmônica, em cada um desses casos, respectivamente:

$$70,804, \quad 77,718 \quad \text{e} \quad 91,5273.$$

Imagine, finalmente, que esse computador estivesse ligado desde a origem do universo, há 16 bilhões de anos. Ele estaria hoje obtendo o valor aproximado de 94,2999 para soma da série harmônica, um número ainda muito pequeno para fazer suspeitar que a série diverge.

— Mas como se chega ao número 94,299, se o (idealizado) computador mais rápido que se possa construir deveria ficar ligado durante 16 bilhões de anos?

Sim, não há como fazer essa soma, mas existem métodos que permitem substituir a soma S_n dos n primeiros termos da série por uma expressão matemática que aproxima S_n e que

[2] Veja nosso artigo na *Revista Matemática Universitária*, Nº 4, Dezembro de 1986.

pode ser calculada numericamente; e os matemáticos sabem disso há mais de 300 anos!...[3]

Nicole Oresme e a série de Swineshead

Nicole Oresme (1325–1382) foi um destacado intelectual em vários ramos do conhecimento, como Filosofia, Matemática, Astronomia, Ciências Físicas e Naturais. Além de professor universitário, Oresme era conselheiro do rei, principalmente na área de finanças públicas; e nessa função revelou-se um homem de larga visão, recomendando medidas monetárias que tiveram grande sucesso na prática. Ao lado de tudo isso, Oresme foi também bispo de Lisieux.

Oresme mantinha contato com o grupo de pesquisadores de Oxford e contribuiu no estudo de várias das séries estudadas nessa época. Uma dessas séries é a seguinte:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n},$$

Essa série foi considerada, por volta de 1350, por Richard Swineshead, um dos matemáticos de Oxford. Ela surge a propósito de um movimento que se desenvolve durante o intervalo de tempo [0, 1] da seguinte maneira: a velocidade permanece constante e igual a 1 durante a primeira metade do intervalo, de zero a 1/2: dobra de valor no segundo subintervalo (de duração 1/4), triplica no terceiro subintervalo (de duração 1/8), quadruplica no quarto sub- intervalo (de duração 1/16) etc. Como se vê, a soma da série assim construida é a soma dos produtos da velocidade pelo tempo em cada um dos sucessivos sub-intervalos de tempo e representa o espaço total percorrido pelo móvel (Fig. 3.1a).

Swineshead achou o valor 2 para a soma através de um longo e complicado argumento verbal. Mais tarde, Oresme, deu uma explicação geométrica bastante interessante para a soma da série. Observe que essa soma é igual à área da figura formada com uma infinidade de retângulos verticais, como ilustra a Fig. 3.1a. O raciocínio de Swineshead, combinado com a interpretação geométrica de Oresme, se traduz simplesmente no seguinte: a soma das áreas dos retângulos verticais da Fig. 3.1a é igual à soma das áreas dos retângulos horizontais da Fig. 3.1b. Ora, isso é o mesmo que substituir o movimento original por uma sucessão infinita de movimentos, todos com velocidade igual à velocidade original: o primeiro no intervalo de tempo [0, 1]; o segundo no intervalo de tempo [1/2, 1]; o terceiro no intervalo [3/4, 1]; e assim por diante. Vê-se assim que o espaço percorrido (soma das áreas dos retângulos da Fig. 3.1b) é agora dado pela soma da série geométrica

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

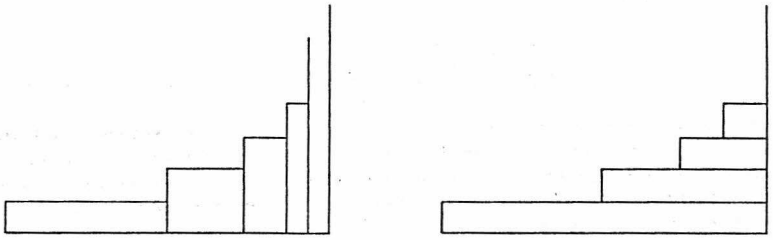
Isso permite obter a soma da série original, pois sabemos somar uma série geométrica; no caso desta última o valor é 2.

Hoje em dia a maneira natural de somar a série de Swineshead é esta:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(n-1)}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2^n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 1 + \frac{S}{2},$$

[3] O leitor curioso pode ver a explicação desses métodos em nosso artigo na *Revista Matemática Universitária*, Nº 19, Dezembro de 1995.



(a) *(b)*

Fig. 3.1

donde $S = 2$. Deixamos ao leitor a tarefa de interpretar esse procedimento em termos do raciocínio de Swineshead e Oresme.

As séries infinitas, como dissemos acima, tiveram um papel importante no desenvolvimento do Cálculo, desde o início desse desenvolvimento no século XVII. Mas foi no século XIX que as idéias de convergência e somas infinitas atingiram plena maturidade, e isso devido, principalmente, ao trabalho de Cauchy, de quê falaremos a seguir.

Cauchy e as séries infinitas

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) é a figura mais influente da Matemática na França de sua época. Como professor da Escola Politécnica ele escreveu vários livros didáticos, bastante inovadores, por isso mesmo tiveram grande influência por várias décadas. O primeiro desses livros é o *Cours d'Analyse* de 1821, cujo capítulo VI é dedicado às séries, e contém quase todos os resultados que discutimos no presente capítulo. É também aí que aparece o critério de convergência que viria ser chamado "de Cauchy", formulado nos seguintes termos:

"... para que a série u_0, u_1, u_2,... u_n, u_{n+1}, &c... *seja convergente, é necessário e suficiente que valores crescentes de n façam convergir indefinidamente a soma* $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \&c \ldots + u_{n-1}$ *para um valor fixo s: em outras palavras, é necessário e suficiente que, para valores infinitamente grandes do número n, as somas* s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, &c... *difiram da soma s, e por conseqüência entre elas, por quantidades infinitamente pequenas.*"

O pouco mais que Cauchy escreve em seguida sobre esse critério nada acrescenta de substância, apenas esclarece ser [...necessário e suficiente] "*que, para valores crescentes de n, as somas das quantidades* u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, &c... *tomadas, a partir da primeira, tantas quantas se queiram, resultem sempre em valores numéricos inferiores a todo limite prescrito.*"

Ao contrário de Bolzano, Cauchy sequer acena com uma demonstração — parece julgá-la desnecessária —, limitando-se a usar esse critério para provar que a série harmônica é divergente e que a série alternada $\sum(-1)^n/n$ é convergente. No primeiro caso ele observa que

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2},$$

donde conclui que a série é divergente. No segundo caso o raciocínio é o seguinte, supondo $m > n$: se $m - n$ for ímpar,

$$|S_n - S_m| = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right);$$

e se $m - n$ for par,

$$|S_n - S_m| = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right) - \frac{1}{m}$$

Em qualquer desses casos, $|S_n - S_m| < 1/n$, o que prova a convergência desejada. É fácil verificar que esse último raciocínio se aplica também à série alternada $\sum(-1)^n a_n$, onde (a_n) é uma seqüência nula não crescente. Aliás, a convergência dessa série já era sabida de Leibniz (1646–1716), que lhe faz referência numa carta de 1713, o que explica atribuir-se a ele o teste dado no Teorema 3.21 (p. 92).

Essas são as únicas aplicações em que Cauchy utiliza seu critério de convergência, podendo-se então dizer que tal critério não teria feito falta alguma a Cauchy. Sua importância só se faria sentir mais tarde, no final do século, no trato de importantes problemas de aproximação, em equações diferenciais e cálculo de variações.

Embora, como dissemos, o trabalho de Cauchy tenha tido influência decisiva no desenvolvimento e consolidação do estudo da convergência das séries no século XIX, esse desenvolvimento vinha desabrochando desde o final do século anterior. E a esse respeito devemos mencionar aqui o importante trabalho de um ilustre autor português, José Anastácio da Cunha. As séries infinitas são discutidas no capítulo IX ("livro" IX) de sua obra "Princípios Mathematicos", onde se pode identificar uma verdadeira antecipação de muitas das idéias de Cauchy e seus contemporâneos, inclusive o "critério de convergência de Cauchy".[4]

[4]Veja o artigo de J. F. Queiró na *Revista Matemática Universitária*, Nº 14, Dezembro de 1992.

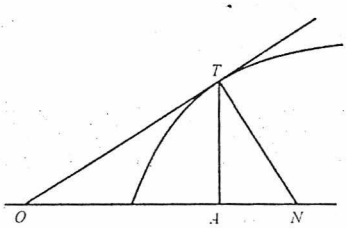
Capítulo 4

FUNÇÕES, LIMITE E CONTINUIDADE

O conceito de função

O leitor já encontrou o conceito de função em seus estudos anteriores, sobretudo nas disciplinas de Cálculo. Tendo em conta a importância desse conceito num curso de Análise, vamos retomá-lo aqui, começando com alguns aspectos de sua evolução histórica a partir do século XVII. Nessa época, com o aparecimento da Geometria Analítica, muitos problemas matemáticos eram convenientemente formulados e resolvidos em termos de variáveis ou incógnitas que podiam ser representadas em eixos de coordenadas.

Fig. 4.1



Consideremos, como exemplo, o problema de traçar a reta tangente a uma dada curva (Fig. 4.1). Nesse problema intervêm várias grandezas, como a ordenada do ponto de tangência T, os comprimentos da tangente OT, da subtangente OA, da normal TN e da subnormal AN. E as investigações giravam em torno de equações envolvendo essas várias grandezas, as quais eram encaradas como diferentes variáveis ligadas à curva, em vez de serem vistas como funções separadas de uma única variável independente. Mas, aos poucos, uma dessas variáveis — no caso, a abscissa de T — foi assumindo o papel do que hoje chamamos a *variável independente*

A palavra "função" foi introduzida por Leibniz (1646-1716) em 1673, justamente para designar qualquer das várias variáveis geométricas associadas com uma dada curva. Só aos poucos é que o conceito foi-se tornando independente de curvas particulares e passando a significar a dependência de uma variável

em termos de outras. Mas, mesmo assim, por todo o século XVIII, o conceito de função permaneceu quase só restrito à idéia de uma variável (dependente) expressa por alguma fórmula em termos de outra ou outras variáveis (independentes).

Essa idéia de função, todavia, revelou-se inadequada a partir do momento em que os matemáticos começaram a definir funções pelos processos infinitos do Cálculo. Por exemplo, uma função pode ser definida pela fórmula

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx,$$

Mas prova-se que a soma dessa série é

$$f(x) = \frac{x}{2} \quad \text{se} \quad -\pi < x < \pi; \quad f(-\pi) = f(\pi) = 0.$$

Faça um gráfico desta última função e repare em seu aspecto tipo "serra", com descontinuidades nos pontos $x = n\pi$. No entanto, a série inicial que a define tem um aspecto de muita regularidade, pela regularidade de seus termos, todos com gráficos contínuos, sem qualquer ruptura. Foi o processo de soma infinita da definição inicial que fez surgir uma fórmula nova para definir a função, bem como as descontinuidades do gráfico.

Exemplos como esse que acabamos de dar deixavam claro que o conceito de função dado por uma fórmula era inadequado. A definição mais geral de função que utilizamos hoje e que é dada logo a seguir, evoluiu principalmente dos trabalhos de Fourier e Dirichlet no século XIX, e sobre os quais falaremos mais em nota no final do capítulo.

4.1. Definição. *Uma função* $f\colon D \mapsto Y$ *é uma lei que associa elementos de um conjunto* D*, chamado o* domínio *da função, a elementos de um outro conjunto* Y*, chamado o* contradomínio *da função.*

Em geral, o contradomínio é um conjunto fixo, o mesmo para toda uma classe de funções sob consideração, não acontecendo necessariamente que todo elemento de Y corresponda a algum elemento do domínio pela ação da função que esteja sendo considerada. Já com o domínio a situação é diferente, pois cada função tem seu domínio próprio, e todos os elementos do domínio são objeto de ação da função.

Em nosso estudo estaremos interessados tão-somente em funções cujos domínios sejam subconjuntos dos números reais, principalmente intervalos dos vários tipos considerados logo no início do Capítulo 2. O contradomínio será sempre o mesmo, o conjunto dos números reais.

Terminologia e notação

Costuma-se denotar com $f(x)$ o elemento que uma função f associa ao elemento

x. Escreve-se:

$$f\colon\ x \in D \mapsto y = f(x),$$

significando com isso que y é a imagem de x pela f. Outro modo consiste em identificar a função com seu *gráfico*, que é o conjunto $f = \{(x,\ f(x))\colon\ x \in D\}$.

É muito comum dizer "seja a função $y = f(x)$", em cujo caso estamos usando o próprio símbolo $y = f(x)$ para denotar a função f, embora com certa impropriedade, pois $f(x)$ é o valor da função num valor particular de D. Portanto, quando essa notação é usada, deve-se entender que x denota qualquer valor no domínio D, por isso mesmo chama-se *variável* de domínio D, a chamada *variável independente*. y é a *imagem de* x *pela função* f, a chamada *variável dependente*.

O conjunto de todos os valores da função,

$$I_f = \{y = f(x)\colon\ x \in D\},$$

é chamado a *imagem de* D *pela* f, e freqüentemente indicado por $f(D)$. De um modo geral, sendo A um subconjunto de D, define-se a imagem de A mediante a expressão

$$f(A) = \{f(x)\colon\ x \in A\}.$$

Para caracterizar uma função não basta prescrever a lei de correspondência f; é necessário também especificar seu domínio D. Freqüentemente as funções são dadas por fórmulas algébricas ou analíticas, como

$$f(x) = x^2 + 1; \quad f(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt; \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Mas nem sempre é assim; teremos oportunidade de lidar com funções dadas por leis bem gerais, que não se enquadram nessas categorias.

Muitas vezes o domínio de uma função não é mencionado, ficando subentendido tratar-se do maior conjunto para o qual a expressão que define a função faz sentido. Assim, nos dois primeiros exemplos acima, o domínio é o conjunto de todos os números reais, enquanto no último é o semi-eixo $x > 1$.

Uma função f com domínio D é dita *limitada à esquerda* ou *limitada inferiormente* se existe um número A tal que $A \leq f(x)$ para todo $x \in D$; e *limitada à direita ou limitada superiormente* se existe um número B tal que $f(x) \leq B$ para todo $x \in D$. Uma função que é limitada à direita e à esquerda ao mesmo tempo é dita, simplesmente, *limitada*; é claro que isso equivale a dizer que existe um número M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in D$.

Diz-se que uma função g é *extensão* de uma função f, ou que f é restrição de g, se o domínio de f está contido no domínio de g e as duas funções coincidem no domínio de f. As operações sobre funções, como *adição, multiplicação, divisão* etc., são definidas de maneira óbvia, em termos das mesmas operações

sobre números. É claro que as funções sobre as quais se fazem essas operações devem ter o mesmo domínio; e se não for esse o caso, é necessário restringir os domínios ao conjunto interseção dos domínios das funções envolvidas. Por exemplo, embora a função $f(x) = x^2$ esteja definida para todo x real, o produto $g(x) = x^2\sqrt{x}$ é uma função com domínio $x \geq 0$, o mesmo da função $h(x) = \sqrt{x}$.

Vários tipos de função

Sejam f e g duas funções, com domínios D_f e D_g, respectivamente. Suponhamos que $g(D_g) \subset D_f$; assim, qualquer que seja $x \in D_g$, $g(x) \in D_f$ e podemos considerar $f(g(x))$. A função $h : x \mapsto f(g(x))$, com domínio D_g, é chamada a *composta* das funções f e g, freqüentemente indicada com o símbolo "fog". Por exemplo, $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ é função composta das funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 1$. Como o domínio de f é o semi-eixo $x \geq 0$, o domínio de h é o conjunto dos números x tais que $|x| \geq 1$.

Diz-se que uma função $f\colon D \mapsto Y$ é *injetiva* ou *invertível* se

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Isso é o mesmo que afirmar: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$; e significa que cada elemento y da imagem de f provém de um único elemento x no domínio de f: $y = f(x)$. Isso nos permite definir a chamada *função inversa* da função f, freqüentemente indicada com o símbolo f^{-1}, que leva $y \in f(D)$ no elemento $x \in D$ tal que $f(x) = y$. É fácil ver então que $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x D e $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in f(D)$.

Diz-se que uma função $f\colon D \mapsto Y$ é *sobrejetiva* se $f(D) = Y$. Uma função que é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva tem inversa definida em todo o conjunto Y. Ela estabelece assim uma correspondência entre os elementos $x \in D$ e os elementos $y = f(x) \in Y$, que é chanada *correspondência biunívoca*, justamente por ser *unívoca* nos dois sentidos: cada elemento em D tem um e um só correspondente em Y pela f; e cada elemento de Y tem um e um só correspondente em D pela inversa f^{-1}. Uma função nessas condições é chamada uma *bijeção* ou *função bijetiva*. É claro que toda função injetiva é uma bijeção de D sobre $f(D)$.

Diz-se que uma função f definida num intervalo é *crescente* se $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$; *decrescente* se $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$; *não decrescente* se $x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$ e *não crescente* se $x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$. Em todos esses casos f é chamada *função monótona*.

Diz-se que f é uma *função par* se seu domínio D é simétrico em relação á origem (isto é, $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$) e $f(-x) = f(x)$; f é *função ímpar* se o domínio é do mesmo tipo e $f(-x) = -f(x)$.

Dada uma função $f\colon D \mapsto Y$ e B um subconjunto de Y, define- se $f^{-1}(B)$

(mesmo que f não seja invertível) mediante

$$f^{-1}(B) = \{x \in D:\ f(x) \in B\}.$$

Então, $f^{-1}(Y) = D$ e $f^{-1}(B) = \phi$ se $B \cap f(D) = \phi$.

Exercícios

1. Considere a função $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, definida para todo $x \neq 0$. Estude seu gráfico, notando particularmente o comportamento da função quando $|x|$ torna-se arbitrariamente grande ou próximo de zero. Determine os pontos onde f se anula.

2. Faça o gráfico das funções $f(x) = x\operatorname{sen}(1/x)$ e $g(x) = x^2\operatorname{sen}(1/x)$, que estão definidas para todo $x \neq 0$.

3. Considere a seguinte função, conhecida como *função de Dirichlet*: $f(x) = 1$ se x é racional e $f(x) = 0$ se x é irracional. Descreva a função $g(x) = f(\sqrt{x})$.

4. Se f é a função de Dirichlet, descreva o conjunto $\{x:\ f(x) \leq x\}$. Descreva também o conjunto $\{x:\ f(x) \leq x^2\}$.

5. Prove que toda função crescente (decrescente) é invertível e sua inversa é crescente (decrescente).

6. Defina convenientemente o domínio de cada uma das função seguintes, de forma que elas sejam invertíveis e calcule suas inversas:

$$a)\ f(x) = x^2 - 2x - 3; \qquad b)\ f(x) = -x^2 + x + 2;$$

$$c)\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}; \qquad d)\ f(x) = -\sqrt{4 - x^2}.$$

7. Faça o gráfico da função $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Prove que sua imagem é o intervalo $|y| < 1$. Prove que ela é injetiva, provando que $y = y' \Rightarrow x = x'$. Calcule sua inversa.

8. Prove que toda função com domínio simétrico em relação à origem decompõe-se de maneira única na soma de uma função par com uma função ímpar.

9. Se f é uma função com domínio D e A e B são subconjuntos de D, prove que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ e $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Dê um contra-exemplo para mostrar que $f(A \cap B)$ pode ser diferente de $f(A) \cap f(B)$. Prove que a última inclusão é a igualdade se f for injetiva.

10. Prove, de um modo geral, que quaisquer que sejam a função f com domínio D e $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ uma seqüência enumerável de subconjuntos de D, valem as seguintes relações:

$$f(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \cup_{i=1}^{\infty} f(A_i); \quad f(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) \subset \cap_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

Prove ainda que esta última inclusão é a igualdade se f for injetiva.

11. Prove que se $f: D \mapsto Y$ é uma função qualquer e B um subconjunto de Y, então $f^{-1}(Y - B) = D - f^{-1}(B)$.

12. Sejam $f: D \mapsto Y$ uma função qualquer e A e B subconjuntos de Y. Prove que

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B); \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

13. Generalize o resultado anterior, provando que

$$f^{-1}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \cup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i) \quad \text{e} \quad f^{-1}(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \cap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i),$$

onde $f: D \mapsto Y$ é uma função qualquer e $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma seqüência enumerável de subconjuntos de Y.

14. Prove que se $f: D \mapsto Y$ é injetiva e $A \subset D$, então $f^{-1}(f(A)) = A$. Mostre, por contra-exemplo, que isso não é necessariamente verdade se f não for sobrejetiva.

15. Prove que se $f: D \mapsto Y$ é sobrejetiva e $B \subset Y$, então $f(f^{-1}B)) = B$. Mostre, por contra-exemplo, que isso não é necessariamente verdade se f não for injetiva.

16. Se f é uma função qualquer, seja $|f|$ a *função módulo*, assim definida: $|f|(x) = |f(x)|$. Dadas duas funções f e g, com o mesmo domínio, expresse

$$(\max\{f,\, g\})(x) = \max\{f(x),\, g(x)\} \quad \text{e} \quad (\min\{f,\, g\})(x) = \min\{f(x),\, g(x)\}.$$

em termos da função módulo.

17. Seja f uma função com domínio D. Por $\sup_D f$, $\sup_{x \in D} f(x)$, ou simplesmente $\sup f$, designa-se o supremo do conjunto $f(D) = \{f(x):\ x \in D\}$; e analogamente para $\inf_D f$, $\inf_{x \in D} f(x)$, ou $\inf f$. Sendo f e g funções limitadas num domínio D, prove que

$$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g \quad \text{e} \quad \inf(f+g) \geq \inf f + \inf g.$$

Dê exemplos mostrando que os sinais de desigualdade podem ser estritos ou não.

18. Seja f uma função limitada num domínio D. A *oscilação* de f em D, denotada por ω ou, mais precisamente, $\omega(f,\ D)$, é definida por $\omega = M - m$, onde $M = \sup f$ e $m = \inf f$. Prove que $\omega = \sup A$, onde $A = \{f(x) - f(y):\ x \in D,\ y \in D\}$.

Sugestões e soluções

1. Essa função é estudada detalhadamente em nosso livro Cálculo 1.

3. Nos pontos x da forma $(p/q)^2$, com p e q primos entre si, onde ela é 1.

8. $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

9. Com referência à inclusão, se $y \in f(A \cap B)$, $y = f(x)$, com $x \in A \cap B$, logo $y \in f(A) \cap f(B)$. Pode acontecer que um certo y esteja em $f(A) \cap f(B)$ sem estar em $f(A \cap B)$. Para isso basta que y seja igual a $f(a)$ e igual a $f(b)$, com $a \in A$ e $b \in B$, sem que haja um $c \in A \cap B$ tal que $y = f(c)$. Dê um exemplo concreto dessa situação.

11. Observe que $x \in f^{-1}(Y - B) \Rightarrow f(x) \in Y$ e $f(x) \notin B$; e que isto implica $x \in D$ e $x \notin f^{-1}(B)$. Observe também que essas implicações são reversíveis.

16. $\max\{f,\, g\} = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$ e expressão análoga para $\min\{f,\, g\}$.

17. Observe que $(f+g)(D) = \{f(x) + g(x):\ x \in D\} \subset f(D) + g(D)$ e aplique o resultado dos Exercs. 15 e 18 da p. 36. Ou, então, observe que, qualquer que seja $x \in D$,

$$\inf f + \inf g \leq \inf f + g(x) \leq f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad f(x) + g(x) \leq \sup f + g(x) \leq \sup f + \sup g.$$

18. É claro que $\sup A \leq \omega$. Por outro lado, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existem x e y em D tais que $f(x) > M - \varepsilon/2$ e $f(y) < m + \varepsilon/2$, donde $f(x) - f(y) > \omega - \varepsilon$; e isso prova que $\omega \leq \sup A$.

Limite e continuidade, primeiras definições

Sempre que falarmos em "número" sem qualquer qualificação, entederemos tratar-se de um número real. Como os números reais são representados por pontos de uma reta, através de suas abscissas, é costume usar a palavra "ponto" em lugar de "número"; assim, "ponto x" significa "número x".

Já definimos "vizinhança ε" de um ponto na p. 48. De um modo geral, *vizinhança* de um ponto é qualquer conjunto que contenha a internamente. Mas, a menos que o contrário seja dito explicitamente, "vizinhança" para nós significará sempre um intervalo aberto. Em particular, dado $\varepsilon > 0$, o intervalo $V_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ é uma vizinhança de a, chamada naturalmente *vizinhança simétrica* de a, ou *vizinhança* ε de a. Às vezes interessa considerar uma vizinhança ε de a, excluído o próprio ponto a, a chamada *vizinhança perfurada*. Vamos denotá-la $V'_\varepsilon(a)$:

$$V'_\varepsilon(a) = V_\varepsilon(a) - \{a\} = \{x\colon 0 < |x-a| < \varepsilon\}.$$

Diz-se que um número a é *ponto de acumulação* de um conjunto C se toda vizinhança de a contém infinitos elementos de C. Isso equivale a dizer que (Exerc. 1 adiante) *toda vizinhança de a contém algum elemento de C diferente de a*; ou ainda, dado qualquer $\varepsilon > 0, V'_\varepsilon(a)$ *contém algum elemento de C*.

Um ponto de acumulação de um conjunto pode ou não pertencer ao conjunto; por exemplo, os extremos a e b de um intervalo aberto $(a,\ b)$ são pontos de acumulação desse intervalo, mas não pertencem a ele. Todos os pontos do intervalo também são seus pontos de acumulação e pertencem a ele.

Um ponto x de um conjunto C diz-se *isolado* se não for ponto de acumulação de C. Isso é equivalente a dizer que existe $\varepsilon > 0$ tal que $V'_\varepsilon(x)$ não contém qualquer elemento de C. Chama-se *discreto* todo conjunto cujos elementos são todos isolados. O conjunto

$$A = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1}\ \ldots\right\}$$

é discreto, pois seus pontos são todos isolados, e seu único ponto de acumulação é o número 1, que não pertence ao conjunto.

Vamos introduzir uma noção referente a dois conjuntos A e B, que é utilizada com freqüência quando $A \subset B$, embora esta condição não seja necessária na definição que vamos dar.

Diz-se que um conjunto A é *denso* num conjunto B se todo ponto de B que não pertencer a A é ponto de acumulação de A. Dito de outro modo, todo ponto de B ou já está em A ou é ponto de acumulação de A, de sorte que se juntarmos a A seus pontos de acumulação, o conjunto resultante conterá B. Em particular, A ser denso em $\mathbf{R}$ significa que todo número real é ponto de acumulação de A.

Por exemplo, o conjunto $\mathbf{Q}$ é denso em $\mathbf{R}$; também é denso em $\mathbf{R}$ o conjunto dos números irracionais.

As definições de limite e continuidade

Historicamente, o conceito de limite é posterior ao de derivada. Ele surge da necessidade de calcular limites de razões incrementais que definem derivadas. E esses limites são sempre do tipo 0/0. Por aí já se vê que os exemplos interessantes de limites devem envolver situações que só começam a aparecer num curso de Cálculo depois que o aluno adquire familiaridade com uma classe razoável de funções. Aliás, os primeiros limites interessantes a ocorrer nos cursos de Cálculo são os das funções

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \text{e} \quad \frac{1-\cos x}{x}, \tag{4.1}$$

com x tendendo a zero. Isso acontece no cálculo da derivada da função $y = \operatorname{sen} x$. Mais tarde, no estudo das integrais impróprias, surge a necessidade de considerar limites de funções como

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1-t}}\,dt, \tag{4.2}$$

com x tendendo a 1.

Observe que, em todos esses casos e outros parecidos, a variável x deve aproximar um certo valor, *sem nunca coincidir com esse valor*; e que o valor do qual x se aproxima deve ser ponto de acumulação do domínio da função. Essas observações ajudam a bem compreender a definição que damos a seguir.

4.2. Definição. *Dada uma função f com domínio D, seja* a *um ponto de acumulação de D* (que pode ou não pertencer a D). *Diz-se que um número L é o limite de $f(x)$ com x tendendo a a se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Para indicar isso escreve-se

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \quad \lim_{x\to a} f(x) = L, \quad f(x) \to L \text{ com } x \to a,$$

ou $\lim f(x) = L$, *omitindo a indicação "$x \to a$" quando for óbvia.*

A condição (4.3) pode ainda ser escrita das seguintes três maneiras equivalentes:

$$x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

$$x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon,$$

$$x \in V'_\delta(a) \cap \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L).$$

A Definição 4.2 costuma ser chamada a *definição ε-δ* de limite, por razões óbvias. Há uma outra maneira equivalente de definir limite, a chamada *definição sequencial de limite*, caracterizada no Teorema 4.10 adiante.

A exclusão do ponto $x = a$ na definição de limite é natural, pois o limite L nada tem a ver com o valor $f(a)$, como vemos pelos muitos exemplos concretos. como em (4.1) e (4.2). O conceito de limite é introduzido para caracterizar o comportamento da função $f(x)$ nas proximidades do valor a, porém mantendo-se sempre diferente de a. Assim, podemos mudar o valor da função no ponto como quisermos, sem que isso mude o valor do limite, e é assim mesmo que deve ser. Agora, se a função já está definida em a, e seu valor aí coincide com seu limite. então ocorrerá a continuidade no ponto. É por isso mesmo que, quando a função ainda não está definida, mas tem limite num ponto a, costuma-se defini-la nesse ponto como sendo o valor do limite. É o que fazemos em exemplos como (4.1) e (4.2).

Sempre que nos referirmos ao limite de uma função com $x \to a$ deve-se entender que a é ponto de acumulação do domínio da função, mesmo que isso não seja dito explicitamente. E entendemos também que a seja ponto de acumulação do domínio D da função f, ao investigarmos se f é contínua nesse ponto.

4.3. Definição. *Diz-se que a função f é contínua no ponto $x = a$ se existir o limite de $f(x)$ com x tendendo a a e esse limite for igual a $f(a)$; e diz-se que f é contínua em seu domínio, ou contínua, simplesmente, se ela for contínua em todos os pontos desse domínio.*

Propriedades do limite

4.4. Teorema. *Se uma função f com domínio D tem limite L com $x \to a$. então $|f(x)|$ tem limite $|L|$. Em particular, se f é contínua em $x = a$, então $|f(x)|$ também é contínua nesse ponto, isto é,* $\lim_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|$.

Para a demonstração, observe que $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$. Por hipótese. dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Portanto. teremos também $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow ||f(x)| - |L|| < \varepsilon$. como queríamos provar.

4.5. Teorema. *Se uma função f com domínio D tem limite L com $x \to a$. e se $A < L < B$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow A < f(x) < B$.*

Demonstração. Como na demonstração do Teorema 2.6 (p. 52), basta tomar $\varepsilon < \min\{L - A,\ B - L\}$; o δ que for determinado em correspondência a esse ε satisfará a condição do teorema, pelas mesmas razões explicadas na demonstração do Teorema 2.6.

4.6. Corolário. *Se uma função f com domínio D tem limite L com $x \to a$.*

então existe $\delta > 0$ tal que $f(x)$ é limitada em $V'_\delta(a) \cap D$.

A demonstração é imediata, considerando, por exemplo, $A = L - 1$ e $B = L + 1$ no teorema anterior.

4.7. Corolário (permanência do sinal). *Se uma função f com domínio D tem limite $L \neq 0$ com $x \to a$, então existe $\delta > 0$ tal que, $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) > L/2$ se $L > 0$ e $f(x) < L/2$ se $L < 0$; ou seja, $|f(x)| > |L|/2$ em ambos os casos.*

Para a demonstração, se $L > 0$ faça $A = L/2$ no teorema; e se $L < 0$ faça $B = L/2$. Este resultado é conhecido como o *teorema da permanência do sinal*, justamente porque, numa vizinhança do ponto a, a função permanece com o mesmo sinal de L. Porém, mais do que permanência do sinal, é importante observar que a função permanece afastada de zero, ou seja, $|f(x)| > |L|/2$ em $V'_\delta(a) \cap D$. Observe a utilização deste resultado na demonstração do item d) do teorema seguinte.

4.8. Teorema. *Se duas funções f e g com o mesmo domínio D têm limites com $x \to a$, então* (Nos limites indicados a seguir, é claro, $x \to a$.)

a) $f(x) + g(x)$ tem limite e $\lim[f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$;

b) sendo k constante, $kf(x)$ tem limite e $\lim[kf(x)] = k \cdot \lim f(x)$;

c) $f(x)g(x)$ tem limite e $\lim [f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$;

d) se, além das hipóteses feitas, $\lim g(x) \neq 0$, então $f(x)/g(x)$ tem limite e $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$.

Demonstração. Vamos demonstrar apenas o item d), deixando os demais a cargo do leitor, já que as demonstrações de todos eles são inteiramente análogas às do Teorema 2.8 da p. 52.

Sendo $L \neq 0$ o limite de g, vamos provar que $1/g(x) \to 1/L$ com $x \to a$. O procedimento é o mesmo da demonstração dada para o item d) do Teorema 2.8. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow |g(x) - L| < \frac{\varepsilon L^2}{2}. \tag{4.4}$$

Se necessário, diminuimos o δ de maneira a termos também, de acordo com o Corolário 4.7,

$$x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow |g(x)| > |L|/2. \tag{4.5}$$

Então, com $x \in V'_\delta(a) \cap D$, teremos

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L}\right| = \frac{|g(x) - L|}{|Lg(x)|} < \frac{\varepsilon L^2}{2|Lg(x)|} < \frac{\varepsilon L^2}{2} \cdot \frac{2}{L^2} = \varepsilon,$$

e isso completa a demonstração.

Se $g(x)$ tende a zero e $f(x)$ tem limite diferente de zero, então o quociente $f(x)/g(x)$ pode tender a $\pm\infty$ (limites infinitos serão tratados mais adiante), tudo dependendo do comportamento particular de f e g. Quando $f(x)$ e $g(x)$ tendem ambas a zero, o quociente $f(x)/g(x)$ pode ter limites os mais variados, dependendo novamente do comportamento particular de f e g. Trata-se aqui de um tipo de "forma indeterminada", muito estudada nos cursos de Cálculo, principalmente em conexão com a chamada "regra de l'Hôpital".

4.9. Corolário. *Se f e g são funções contínuas em $x = a$, então são também contínuas em $x = a$ as funções $f + g$, fg e kf, onde k é uma constante qualquer; e é também contínua em $x = a$ a função f/g, desde que $g(a) \neq 0$.*

O teorema seguinte permite definir limite de uma função em termos de limite de seqüências, uma definição equivalente à Definição 4.2.

4.10. Teorema. *Uma condição necessária e suficiente para que uma função f com domínio D tenha limite L com $x \to a$ é que, para toda seqüência $x_n \in D - \{a\}, x_n \to a$, se tenha $f(x_n) \to L$. Em particular, f é contínua num ponto a se, e somente se, para toda seqüência $x_n \in D - \{a\}$, $x_n \to a$, se tenha $f(x_n) \to f(a)$.*

Comentário. O teorema afirma a equivalência de duas proposições A e B, que são:

Proposição A: dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

Proposição B: $x_n \in D - \{a\}$, $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to L$.

Demonstração. Vamos provar primeiro a parte mais fácil: a condição é necessária, ou seja, $A \Rightarrow B$. Supomos, então, que $f(x) \to L$ com $x \to a$. Seja $x_n \in D - \{a\}$, $x_n \to a$; devemos provar que $f(x_n) \to L$. Ora, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$. Com esse $\delta > 0$ determinamos N tal que $n > N \Rightarrow x_n \in V'_\delta(a)$; logo, $n > N \Rightarrow f(x_n) \in V_\varepsilon(L)$, e isso prova B.

Provaremos em seguida que a condição é suficiente, ou seja, que $B \Rightarrow A$. Raciocinaremos por absurdo, provando que a negação de A acarreta a negação de B. Vamos escrever essas negações em detalhe, já que elas são freqüentemente um tropeço para o aluno menos experiente.

Negação de A: existe um $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja $\delta > 0$, sempre existe $x \in V'_\delta(a) \cap D$ com $f(x) \notin V_\varepsilon(L)$.

Negação de B: existe uma seqüência $x_n \in D - \{a\}$, $x_n \to a$, tal que $f(x_n)$

não converge para L.

Como estamos negando A, existe um $\varepsilon > 0$ com o qual podemos tomar qualquer δ; tomemos então toda uma seqüência $\delta_n = 1/n$. Em correspondência a cada um desses δ_n, escolhemos e fixamos um $x_n \in V'_{1/n}(a) \cap D$ com $f(x_n) \notin V_\varepsilon(L)$. Dessa maneira produzimos a negação de B, como desejávamos, pois exibimos uma seqüência $x_n \in D, x_n \neq a$, $x_n \to a$, tal que $f(x)$ não converge para L. Isso completa a demonstração do teorema.

O teorema que acabamos de demonstrar permite deduzir o Teorema 4.8 do Teorema 2.8 (p. 52). Por exemplo, supondo que $f(x)$ e $g(x)$ tenham limites F e G, respectivamente, com $x \to a$, vamos provar que o limite do produto é o produto dos limites. Seja $x_n \in D - \{a\}$ uma seqüência convergindo para a. Então, pela hipótese do Teorema 4.8, $f(x_n) \to F$ e $g(x_n) \to G$; e, pelo Teorema 2.8, $f(x_n)g(x_n) \to FG$, donde o Teorema 4.10 nos leva a concluir que $f(x)g(x) \to FG$, que é o item c) do Teorema 4.8.

4.11. Corolário. *Uma condição necessária e suficiente para que uma função f com domínio D tenha limite com $x \to a$ é que $f(x_n)$ tenha limite, qualquer que seja a seqüência $x_n \in D - \{a\}, x_n \to a$.*

Demonstração. Tendo em conta o Teorema 4.10, a única coisa que devemos provar é que o limite de $f(x_n)$ é o mesmo, qualquer que seja a seqüência $x_n \in D - \{a\}$, $x_n \to a$. Em outras palavras, basta provar que se tivermos duas seqüências, $x_n \in D - \{a\}$, $x_n \to a$ e $y_n \in D - \{a\}$, $y_n \to a$, então $f(x_n)$ e $f(y_n)$ têm o mesmo limite. Sejam L' e L'' esses limites, respectivamente. Devemos mostrar que $L' = L''$. Formemos a seqüência (z_n), onde $z_{2k} = x_k$ e $z_{2k-1} = y_k$. É claro que $z_n \to a$ (Exerc. 3 da p. 62), logo, $f(z_n)$ converge para um certo número L. Mas $f(x_n)$ e $f(y_n)$ são subseqüências de $f(z_n)$, logo convergem para o mesmo limite L, donde $L' = L'' = L$, como queríamos demonstrar.

4.12. Teorema (critério de convergência de Cauchy). *Uma condição necessária e suficiente para que uma função $f(x)$ com domínio D tenha limite com $x \to a$ é que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que*

$$x,\ y \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{4.6}$$

Demonstração. Para provar que a condição é suficiente, seja $x_n \in D - \{a\}$ uma seqüência qualquer, convergindo para a. Então, em virtude de (4.6), dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$n, m > N \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Pelo critério de convergência de Cauchy para seqüências (Teorema 2.25, p. 67) segue-se que $f(x_n)$ converge; e pelo Corolário 4.11, concluímos que $f(x)$ tem limite, como queríamos provar.

Deixamos ao leitor a tarefa de provar que a condição é necessária, que é a parte mais fácil.

4.13. Teorema (continuidade da função composta). *Sejam f e g funções com domínios D_f e D_g respectivamente, com $g(D_g) \subset D_f$. Se g é contínua em x_0 e f é contínua em $y_0 = g(x_0)$, então $h(x) = f(g(x))$ é contínua em x_0.*

Demonstração. Pela continuidade da função f, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que

$$y \in V_{\delta'}(y_0) \cap D_f \Rightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon.$$

Analogamente, pela continuidade da função g, existe $\delta > 0$ em correspondência a δ' tal que

$$x \in V_{\delta}(x_0) \cap D_g \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \delta'.$$

É claro então que

$$x \in V(\delta) \cap D_g \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon,$$

que completa a demonstração.

Exercícios

1. Prove que a é ponto de acumulação de um conjunto X se e somente se dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $x \in V'_{\varepsilon}(a)$.
2. Prove que o limite de uma função, quando existe, é único.
3. Verifique que a função de Dirichlet, $f(x) = 1$ se x é racional e $f(x) = 0$ se x é irracional, pode ser expressa como
$$f(x) = \lim_{n\to\infty}[\lim_{k\to\infty}(\cos n!\pi x)^{2k}].$$
4. Dê exemplo de uma função f que seja descontínua para todo x, enquanto $|f|$ seja sempre contínua.
5. Prove que a função $f(x) = x$ para x racional e $f(x) = -x$ para x irracional só é contínua em $x = 0$, mas $|f(x)|$ é contínua para todo x.
6. Prove que $\sqrt{x}$ é uma função contínua em seu domínio $x \geq 0$.
7. Prove, diretamente da Definição 4.2, que $f(x) = x^2$ é uma função contínua em todo o seu domínio.
8. Prove que a função $f(x) = \text{sen}(1/x)$ não tem limite com $x \to 0$.
9. Prove que a função $f(x) = 1$ se $x > 0$ e -1 se $x < 0$ não tem limite com $x \to 0$.
10. Prove todos os itens do Teorema 4.8.
11. Prove o Teorema 4.8 diretamente, sem usar o Teorema 4.10.
12. Prove, diretamente da Definição 4.2, que $\lim_{x\to 6} \dfrac{5}{x-1} = 1$.
13. Prove, diretamente da Definição 4.2, que $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{2}$.

14. Prove que um polinômio é uma função contínua em todo ponto $x = a$, o mesmo sendo verdade do quociente de dois polinômios, nos pontos que não anulam o denominador.

15. **(Critério de confronto ou da função intercalada.)** Sejam f, g e h três funções com o mesmo domínio D, sendo $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Prove que se $f(x)$ e $h(x)$ têm o mesmo limite L com $x \to a$, então $g(x)$ também tem limite L com $x \to a$.

16. Prove que se $f(x)$ é contínua em $x = a$ e $f(x) \geq 0$, então $g(x) = \sqrt{f(x)}$ é contínua em $x = a$.

17. Sejam f uma função com domínio D, $E \subset D$ e a um ponto de acumulação de E. Prove que se $f(x) \to L$ com $x \to a$ em D, o mesmo é verdade com $x \to a$ em E. Dê um contra-exemplo, mostrando que uma função pode ter limite quando restrita a um sub-domínio E de D e não ter limite em seu domínio D.

18. Seja f uma função contínua em toda a reta, que se anula nos racionais. Prove que f é identicamente nula. Prove, em geral, que toda função contínua num domínio D, que seja nula num subconjunto denso de D, é identicamente nula.

Sugestões e soluções

2. Basta provar que é impossível haver dois limites distintos L e L'.

6. Observe que, sendo $a > 0$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$ para satisfazer a condição (4.3). O caso $a = 0$ é mais simples ainda: $\sqrt{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x < \varepsilon^2$.

7. Se $a \neq 0$, $|x^2 - a^2| = |x+a||x-a| \leq (|x| + |a|)|x-a| \leq 3|a||x-a|$, esta última desigualdade sendo verdadeira se restringirmos x de forma que $|x| < 2|a|$, o que é suficiente para acomodar $x = a$ no intervalo $(-2|a|, 2|a|)$, como bem mostra um gráfico simples. E, em conseqüência, $|x^2 - a^2| < \varepsilon$ se $|x-a| < \delta < \varepsilon/3a$. Para garantir a condição $|x| < 2|a|$, notamos que $|x| = |(x-a)+a| \leq |x-a| + |a| < \delta + |a|$; portanto, devemos tomar $\delta < 2|a|$, além de $\delta < \varepsilon/3a$. O caso $a = 0$ é mais fácil: $x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon} = \delta$.

8. Utilize o Corolário 4.11, seja construindo uma seqüência $x_n \to 0$ tal que $f(x_n)$ não convirja, seja construindo duas seqüências $x_n \to 0$ e $y_n \to 0$ tais que $f(x_n)$ e $f(y_n)$ tenham limites distintos. Outro modo seria usar a desigualdade do triângulo para mostrar que a Definição 4.2 é violada com um $\varepsilon < 2$.

9. Proceda como no exercício anterior.

11. O procedimento é análogo ao da demonstração do Teorema 2.8 da p. 52.

12. É preciso provar que pode-se fazer $\dfrac{5}{x-1} - 1$ em módulo menor que qualquer $\varepsilon > 0$ prescrito, fazendo $|x-6| < \delta$. Ora,

$$\left|\frac{5}{x-1} - 1\right| = \frac{|x-6|}{|x-1|}.$$

Como o x vai estar numa vizinhança δ de 6, podemos supor $\delta < 1$, garantindo $|x-1| > 4$. Faça uma figura para ver que deve ser assim, embora tal fato precise ser provado. E para isto usamos a desigualdade do triângulo, assim:

$$|x-1| = |(x-6)+5| \geq 5 - |x-6| > 5 - \delta > 5 - 1 = 4.$$

Então,

$$\left|\frac{5}{x-1} - 1\right| < \frac{|x-6|}{4}.$$

Isto será menor do que ε se fizermos $|x-6| < 4\varepsilon$, donde se vê que δ deve ser o menor dos números 4ε e 1.

13. O procedimento é análogo ao do exercício anterior. Esses dois exercícios servem para ilustrar a eficácia do Teorema 4.8, mediante o qual os resultados pedidos nos Exercs. 5, 10 e 11 dispensam todo esse trabalho de provar diretamente da definição de limite.

14. Use repetidamente o Teorema 4.8.

17. Como contra-exemplo considere a função $f(x) = \text{sen}(1/x)$, que não tem limite com $x \to 0$. Tome, por exemplo, $D' = \{1/n\pi,\ n = 1, 2, 3\ldots\}$.

Limites laterais e funções monótonas

As definições de limite e continuidade são gerais e abrangem também os casos chamados *limites à direita e à esquerda*, bem como *continuidade à direita* e *continuidade à esquerda*. Essas noções surgem quando lidamos com uma função f cujo domínio só tenha pontos à direita ou à esquerda, respectivamente, do ponto $x = a$, onde desejamos considerar o limite. Por exemplo, a função $y = \sqrt{x}$ tem domínio $x > 0$; podemos considerar seu limite com $x \to 0$ segundo a definição dada, porém isso resultará numa aproximação de $x = 0$ somente por valores positivos. Daí escrevermos, para enfatizar esse fato, "$x \to 0+$". Igualmente, o limite de $\sqrt{-x}$ com $x \to 0$, será um limite com "$x \to 0-$"

De um modo geral, sendo f uma função cujo domínio D só contenha pontos à direita de um ponto $x = a$, que seja ponto de acumulação de D, então o limite de $f(x)$ com $x \to a$, se existir, será um *limite à direita*. Ao contrário, se D só contiver pontos à esquerda de $x = a$, o limite de $f(x)$ com $x \to a$, se existir, será *um limite à esquerda*. Esses limites são indicados com os símbolos

$$\lim_{x \to a+} f(x) \text{ ou } f(a+) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a-} f(x) \text{ ou } f(a-),$$

respectivamente. Diz-se que f *é contínua à direita* (resp. *à esquerda*) em $x = a$ se f está definida nesse ponto, onde seu limite à direita (resp. " à esquerda") é $f(a)$.

Se o domínio de f contiver pontos à direita e à esquerda de $x = a$, devemos restringir esse domínio aos pontos $x > a$ ou $x < a$ para considerarmos seus limites " à direita" e " à esquerda" respectivamente. Evidentemente, para que isso seja possível é preciso que $x = a$ seja ponto de acumulação dos domínios restritos. Diremos que $x = a$ é *ponto de acumulação à direita* do domínio D se ele é ponto de acumulação do domínio restrito a valores $x > a$; e *ponto de acumulação à esquerda* se é ponto de acumulação do domínio restrito a valores $x < a$. Por exemplo, a função $f(x) = x/|x|$, que é igual a $+1$ se $x > 0$ e a -1 se

$x < 0$ tem limites laterais em $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{|x|} = f(0+) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0-} \frac{x}{|x|} = f(0-) = -1.$$

Ela será *contínua à direita* em $x = 0$ se definirmos $f(0) = 1$; e será *contínua à esquerda* nesse mesmo ponto se pusermos $f(0) = -1$.

O teorema que consideramos a seguir é um resultado fundamental na teoria das funções monótonas, o análogo do Teorema 2.12 (p. 57) para seqüências monótonas. Foi para demonstrar esse teorema que Dedekind sentiu necessidade de uma fundamentação adequada dos números reais.

4.14. Teorema. *Seja f uma função monótona e limitada, definida num intervalo I, do qual $x = a$ é ponto de acumulação à direita ou à esquerda. Então $f(x)$ tem limite com $x \to a-$ ou $x \to a+$, respectivamente.*

Demonstração. Suponhamos, para fixar as idéias, que f seja função não decrescente e $x = a$ seja ponto de acumulação à esquerda. Neste caso, basta supor que f seja limitada à direita. Seja L o supremo dos valores de $f(x)$, para todo $x \in I$, $x < a$. Provaremos que $f(a-) = L$. De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $L - \varepsilon < f(a - \delta) \leq L$. Mas f é não decrescente, de sorte que $f(a - \delta) \leq f(x)$ para a $-\delta < x$ e $x \in I$; logo,

$$x \in I,\ a - \delta < x < a \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq L,$$

que prova o resultado desejado.

As demonstrações nos outros casos são feitas por raciocínio análogo e ficam a cargo do leitor.

4.15. Teorema. *Uma condição necessária e suficiente para que uma função seja contínua num ponto a de seu domínio, que seja ponto de acumulação à direita e à esquerda desse domínio, é que os limites laterais da função existam nesse ponto e sejam ambos iguais a $f(a)$.*

A demonstração é fácil e fica para os exercícios.

Limites infinitos e limites no infinito

A definição de limite de uma função se estende aos casos em que, ou a função, ou a variável independente, ou ambas, tendem a valores infinitos. Dizer que uma variável tende a $+\infty$ significa dizer que ela fica maior do que qualquer número $k > 0$. Uma semi-reta do tipo $x > k$ é , por assim dizer, uma "vizinhança de $+\infty$". Analogamente, $x < k$, qualquer que seja k, em particular $k < 0$, é uma "vizinhança de $-\infty$".

As definições seguintes são bastante naturais e dispensam maiores comentários.

4.16. Definições. *Seja f uma função com domínio D e seja a um ponto de acumulação de D. Diz-se que $f(x)$ tende a $+\infty$ com $x \to a$ se, dado qualquer número $k > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) > k$. De modo análogo, diz-se que $f(x)$ tende a $-\infty$ com $x \to a$ se, dado qualquer $k > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) < -k$. Indicam-se esses limites, respectivamente, com os símbolos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Suponhamos agora que D seja ilimitado superiormente. Diz-se que $f(x)$ tem limite L com $x \to +\infty$ se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número $k > 0$ tal que $x \in D$, $x > k \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Analogamente, sendo D ilimitado inferiormente, diz-se que $f(x)$ tem limite L com $x \to -\infty$ se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número $k > 0$ tal que $x \in D$, $x < -k \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Esses limites são indicados, respectivamente, com os símbolos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Definem-se também, de maneira óbvia,

$$\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to a-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to a-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Vários dos resultados anteriores sobre limites permanecem válidos com as noções de limites aqui introduzidas, às vezes com pequenas e óbvias adaptações; outros ainda podem ser formulados e estabelecidos com procedimentos análogos aos usados anteriormente. Veremos, a seguir, alguns desses resultados.

4.17. Teorema. *a) Toda função monótona e limitada, cujo domínio contenha um intervalo do tipo $[c, +\infty)$, possui limite com $x \to +\infty$; b) toda função monótona e limitada, cujo domínio contenha um intervalo do tipo $(-\infty, c]$, possui limite com $x \to -\infty$.*

Demonstração. Esse teorema é o análogo, para $x \to \pm\infty$, do Teorema 4.14, e a demonstração também é análoga. No caso a) suponhamos que f seja não crescente, bastando então supor que f seja limitada inferiormente. Seja A o ínfimo de seus valores $f(x)$. Então, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que $A \leq f(k) < A + \varepsilon$. Como f é não crescente, $x > k \Rightarrow f(x) \leq f(k)$, logo

$x > k \Rightarrow A \leq f(x) < A + \varepsilon$; isso conclui a demonstração no caso considerado. Deixamos ao leitor a tarefa de terminar a demonstração nos demais casos.

Para o próximo teorema notemos que aproximações laterais, consideradas na seção anterior, ocorrem também com os valores de uma função, e não apenas de sua variável independente. Isso pode ser ilustrado em exemplos simples como estes:

$$\lim_{x\to 0\pm} \sqrt[3]{x} = 0\pm; \quad \lim_{x\to 2\pm} (2-x)^3 = 0\mp; \quad \lim_{x\to 0\pm} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x} = 0+.$$

De um modo geral, $f(x) \to a+$ com $x \to a$ significa: *dado qualquer* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que, sendo* D *o domínio de* f,

$$x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow L \leq f(x) < L + \varepsilon.$$

Para a definição de $f(x) \to L-$ basta trocar as últimas desigualdades por $L - \varepsilon < f(x) \leq L$.

4.18. Teorema. *Seja* f *uma função com domínio* $D, f(x) \neq 0$. *Se* $f(x) \to 0+$ *com* $x \to a$, *então* $1/f(x) \to +\infty$ *com* $x \to a$; *e se* $f(x) \to 0-$ *com* $x \to a$, *então* $1/f(x) \to -\infty$ *com* $x \to a$.

Demonstração. Pela hipótese, dado qualquer $k > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow 0 < f(x) < 1/k$, portanto $1/f(x) > k$. Isso prova a primeira parte. A segunda parte é análoga e fica a cargo do leitor.

4.19. Teorema. *Suponhamos que* $f(x) \to A$ *e* $g(x) \to B$ *com* $x \to +\infty$. *Então, com* $x \to +\infty$, *a)* $f(x) + g(x) \to A + B$; *b) sendo* k *constante,* $kf(x) \to kA$; *c)* $f(x)g(x) \to AB$; *d)* $f(x)/g(x) \to A/B$, *desde que* $B \neq 0$.

Este teorema é análogo ao Teorema 4.8; a demonstração também é análoga e fica a cargo do leitor.

4.20. Teorema. a) *Se* $f(x) \to +\infty$ *com* $x \to a$ *e se* $g(x) > k$, *então* $f(x) + g(x) \to +\infty$ *com* $x \to a$. *Além disso, se* $k > 0$, $f(x)g(x) \to +\infty$ *com* $x \to a$.

A demonstração fica a cargo do leitor.

Os teoremas acima são ilustrações de vários resultados envolvendo limites no infinito ou limites infinitos. Deixamos ao leitor a tarefa de verificar a validade de resultados análogos, seja com a variável independente ou com os valores das funções tendendo a $-\infty$.

Convém observar que muitos resultados válidos para limites finitos não são válidos no caso de limites infinitos. Por exemplo, se duas funções tendem a $+\infty$, sua diferença pode ter limite $+\infty$, $-\infty$ ou qualquer valor finito. Esse é um dos

casos de forma indeterminada, do tipo $\infty - \infty$, estudada nos cursos de Cálculo. Outros tipos de formas indeterminadas são ∞/∞, 0^0, 1^∞ e ∞^0. Não vamos nos deter na consideração dessas formas, por serem elas bastante estudadas nos cursos de Cálculo.

As descontinuidades de uma função

Do mesmo modo que só consideramos continuidade de uma função em pontos de acumulação de seu domínio, a noção de descontinuidade será igualmente considerada nesses pontos.

Sendo a um ponto de acumulação do domínio D de uma função f, dizemos que f é descontínua em $x = a$ se, ou f não tem limite com $x \to a$, ou esse limite existe e é diferente de $f(a)$, ou f não está definida em1 $x = a$. Analogamente definimos *descontinuidade à direita* e *descontinuidade à esquerda.*

De acordo com essa definição, estamos admitindo que um ponto possa ser descontinuidade de uma função, mesmo que ele não pertença ao domínio de f. A rigor, não deveria ser assim, só deveríamos admitir descontinuidades em pontos pertencentes ao domínio da função. Mas é natural considerar o que se passa nas proximidades de pontos de acumulação do domínio de uma função, mesmo que tais pontos não pertençam ao domínio. Assim, as funções

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,,\quad \frac{|x|}{x}\,,\quad \frac{1}{x}\quad \text{e}\quad \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,, \tag{4.7}$$

são todas contínuas em seus domínios (iguais a $R - \{0\}$); e, embora $x = 0$ não pertença a esse domínio, é natural considerar o que acontece com essas funções quando x tende a zero.

De acordo com nossa definição, a primeira das funções em (4.7) seria classificada como descontínua em $x = 0$ simplesmente por não estar aí definida, pois tem limite 1 quando $x \to 0$. Atribuindo-lhe o valor 1 em $x = 0$, ela ficará definida e será contínua em toda a reta, por isso mesmo dizemos que esse tipo de descontinuidade é *removível.* A segunda tem limites laterais diferentes com $x \to 0$; ela será contínua à direita se pusermos $f(0) = 1$ e contínua à esquerda se definirmos $f(0) = -1$. A terceira função tende a $\pm\infty$ com $x \to 0$ pela direita ou pela esquerda, respectivamente. Finalmente, a quarta função não tem limite com $x \to 0$. Não há, pois, como remover a descontinuidade, mesmo lateralmente, no caso das duas últimas funções.

As descontinuidades de uma função costumam ser classificadas em três tipos: *removível*, de *primeira espécie* e de *segunda espécie.* A descontinuidade *removível* é aquela que pode ser eliminada por uma conveniente definição da função no ponto considerado, como no primeiro exemplo de (4.7). Como se vê, ela nem é bem uma descontinuidade, pois a função tem limite no ponto considerado, apenas não está adequadamente definida nesse ponto. A descontinuidade é de

primeira espécie ou do tipo salto quando a função possui, no ponto considerado, limites à direita e à esquerda, mas esses limites são distintos. É esse o caso da segunda função em (4.7). Finalmente, a descontinuidade é de *segunda espécie* quando a função tende a $\pm\infty$ no ponto considerado (terceiro exemplo em (4.7)), ou não tem limite nesse ponto (quarto exemplo em (4.7)).

O teorema seguinte é um resultado interessante sobre as funções monótonas limitadas.

4.21. Teorema. *Os pontos de descontinuidade de uma função monótona f num intervalo I (limitado ou não) só podem ser do tipo salto; e formam um conjunto no máximo enumerável.*

Demonstração. Que as descontinuidades só podem ser do tipo salto é imediato, pois a função possui limites laterais em cada ponto.

Vamos provar que o conjunto de pontos de descontinuidade é no máximo enumerável. Suponhamos, para fixar as idéias, que a função seja não decrescente. Se $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$ são pontos de descontinuidade, todos contidos num intervalo $[a, b] \subset I$, então

$$f(x_{i+1}-) - f(x_i+) \geq 0, \quad f(a) \leq f(x_1-) \quad \text{e} \quad f(x_n+) \leq f(b),$$

de sorte que os *saltos* de f nos pontos x_i, definidos como sendo

$$[f(x_i)] = f(x_i+) - f(x_i-),$$

são tais que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)] &= [-f(x_1-) + f(x_1+)] + [-f(x_2-) + f(x_2+)] + \ldots \\ &+ [-f(x_n-) + f(x_n+)] \\ &= -f(x_1-) - \sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{i+1}-) - f(x_i+)] + f(x_n+) \\ &\leq f(x_n+) - f(x_1-) \leq f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Isso prova que, sendo a função limitada, para todo inteiro $m > 0$ só pode haver um número finito de pontos de descontinuidade onde $[f(x_i)] > 1/m$, isto é, o conjunto

$$D_m = \{x\colon\ [f(x)] > 1/m\}$$

é finito. Ora, qualquer ponto de descontinuidade da função está num desses conjuntos D_m, cuja união é o conjunto D de todos os pontos de descontinuidade. Portanto, esse conjunto D é no máximo enumerável, pelo mesmo argumento usado nas pp. 15-16 para provar a enumerabilidade do conjunto dos números racionais. Isso completa a demonstração.

O caso de uma função não crescente é análogo e fica por conta do leitor. Nos dois exemplos seguintes exibimos funções não decrescentes, com infinitos pontos de descontinuidade.

4.22. Exemplo. Consideremos a seqüência $r_n = -1/n$ e seja f a função

$$f(x) = \sum_{r_n<x} \frac{1}{n^2},$$

onde a somatória, como se indica, estende-se a todos os índices n tais que $r_n < x$. Assim,

$$f(x) = 0 \text{ para } x \leq -1; \quad f(x) = 1 \text{ para } -1 < x \leq -1/2;$$

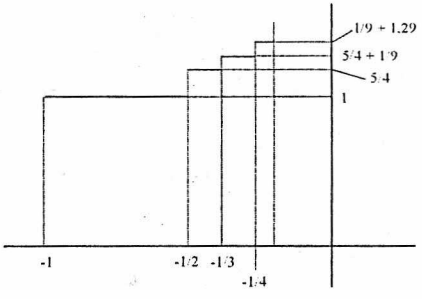
$$f(x) = 1 + 1/4 \text{ para } -1/2 < x \leq -1/3;$$

$$f(x) = 1 + 1/4 + 1/9 \text{ para } -1/3 < x \leq -1/4;$$

e assim por diante. Como se vê, f é contínua em todos os pontos $x \neq r_n$ e contínua à esquerda em todos os pontos $x = r_n$. Seu gráfico tem o aspecto indicado na Fig. 4.2. Deixamos ao leitor a tarefa de verificar, como exercício, que

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = f(y) \quad \text{para} \quad y \geq 0. \tag{4.8}$$

Fig. 4.2



O leitor deve notar que funções como essa podem ser construídas com qualquer seqüência crescente r_n que tenha limite zero ou outro qualquer valor, e qualquer série convergente de termos positivos $\sum a_n$, pondo, simplesmente,

$$f(x) = \sum_{r_n<x} a_n.$$

4.23. Exemplo. Seja (r_n) uma seqüência densa na reta, por exemplo, uma seqüência obtida pela enumeração dos números racionais. Vamos construir uma

função crescente e limitada, definida em toda a reta, e que tenha saltos em todos esses números r_n. Para isso escrevemos

$$f(x) = \sum_{r_n < x} \frac{1}{n^2} \tag{4.9}$$

Como se vê, estamos somando sobre todos os índices n para os quais r_n é menor do que x. Como a série $\sum 1/n^2$ é convergente, é claro que a soma em (4.9) é convergente. É claro também que a função aqui definida é crescente, pois

$$x < y \Rightarrow f(y) - f(x) = \sum_{x \le r_n < y} \frac{1}{n^2} > 0.$$

Deixamos para os exercícios a tarefa de verificar que

$$f(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \quad f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{4.10}$$

bem como a de provar que a função aqui definida é contínua em todo $x \neq r_n$; é contínua pela esquerda e descontínua pela direita em todo $x = r_n$, onde seu salto é $1/n^2$. O leitor deve deter-se num exame atento dessa função, tentar e verificar a impossibidade de construir seu gráfico, para bem entender que está diante de um exemplo de função que é interessante e bastante geral. Finalmente, cabe observar que esse é um exemplo extremo de função monótona descontínua, pois as descontinuidades da função já formam um conjunto enumerável e denso na reta, não sendo possível, pelo teorema anterior, ampliá-lo ainda mais.

Exercícios

1. Faça as demonstrações do Teorema 4.14 nos casos omitidos.
2. Demonstre o Teorema 4.15.
3. Defina cada uma das quatro expressões contidas em $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
4. Faça a demonstração do Teorema 4.17 nos casos omitidos.
5. Faça a demonstração da segunda parte do Teorema 4.18.
6. Demonstre os Teoremas 4.19 e 4.20.
7. Prove que $f(x) = x^3 - 7x^2 + 2x - 9 \to +\infty$ com $x \to +\infty$.
8. Prove que todo polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ tende a $+\infty$ com $x \to \pm\infty$ se n for par; e se n for ímpar, $p(x)$ tende a $-\infty$ com $x \to -\infty$ e a $+\infty$ com $x \to +\infty$.
9. Estude os limites de um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \; a_n \neq 0,$$

com $x \to \infty$. Mostre, em particular, no caso n ímpar, que se $a_n > 0$, $\lim p(x) = \pm\infty$ com $x \to \pm\infty$ (havendo correspondência de sinais); e se $a_n < 0$, $\lim p(x) = \mp\infty$ com $x \to \pm\infty$.

10. Prove que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2-5x+1}{2x^2+7x-8} = 3$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x+1}{x^3+5} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+7x-4}{x+1} = +\infty$.

11. Dados os polinômios $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$, onde $a_n b_m \neq 0$, estude os limites de $p(x)/q(x)$ com $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Prove que esses limites são iguais a a_n/b_m se $n = m$; são ambos nulos se $n < m$; ambos iguais a $+\infty$ se $n > m, n - m$ é par e $a_n b_m > 0$. Examine estas e todas as demais possibilidades.

12. Prove que a função $f(x) = x$ se x é racional e $f(x) = 1 - x$ se x é irracional é contínua em $x = 1/2$ e somente nesse ponto.

13. Seja f uma função crescente e limitada num intervalo (a, b). Prove que $f(a+) < f(x) < f(b-)$.

14. **(Critério de convergência de Cauchy)** Prove que uma condição necessária e suficiente para que uma função f tenha limite finito com $x \to +\infty$ é que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, exista $k > 0$ tal que

$$x,\ y > k \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Enuncie e prove propriedade análoga com $x \to -\infty$.

15. Prove a relação (4.8).

16. Prove as relações (4.10)

17. Prove que a função (4.9) é contínua em $x \neq r_n$ para todo n.

18. Prove que a função (4.9) é contínua pela esquerda em $x = r_N$ e descontínua pela direita, com salto $[f(x_N)] = 1/N^2$.

19. No somatório em (4.9) troque $r_n < x$ por $r \leq x$ e prove que a nova função obtida é contínua pela direita e descontínua pela esquerda em todo ponto $x = r_N$, onde o salto ainda é $1/N^2$.

20. Seja f uma função monótona num intervalo [a, b], cuja imagem é todo um intervalo [c, d]. Prove que f é contínua.

Sugestões e soluções

7. Aplique o Teorema 4.20, notando que $f(x) = x^3(1 - 7/x + 2/x^2 - 9/x^3)$ e que a expressão entre parênteses tende a 1 com $x \to +\infty$, logo, é maior do que qualquer k, $0 < k < 1$ para $|x|$ maior do que um certo N.

8. Pode-se usar o mesmo procedimento do exercício anterior. Outro modo de resolver o problema é o seguinte:

$$\begin{aligned} |p(x)| &= |x^n(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n})| \\ &\geq |x^n|[1 - |\frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}|] \\ &\geq |x^n|[1 - (|\frac{a_{n-1}}{x}| + \ldots + |\frac{a_1}{x^{n-1}}| + |\frac{a_0}{x^n}|)]. \end{aligned}$$

Tomando x suficientemente grande, podemos fazer $|a_i/x^{n-i}| \leq 1/2n$, $0 \leq i \leq n-1$, de sorte que $|p(x)| \geq |x^n|/2$.

14. Transfira o problema para $\zeta = 0$ com a transformação $\zeta = 1/x$.

16. Para provar a segunda das relações, referente ao limite com $x \to +\infty$, devemos provar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe X tal que

$$x > X \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{r_n < x} \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Da convergência da série $\sum 1/n^2$ segue-se que existe N tal que essa soma, a partir de $n = N + 1$, é $< \varepsilon$. Tomemos X tal que $r_1, \ldots, r_N$ sejam todos $< X$. Então, sendo $x > X$, a segunda soma na diferença acima inclui todos os termos correspondentes a $n = 1, \ldots, N$, logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{r_n < x} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

17. Observe que, sendo $h > 0$,

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{x < r_n < x+h} \frac{1}{n^2} \quad \text{e} \quad f(x) - f(x-h) = \sum_{x-h \leq r_n < x} \frac{1}{n^2}.$$

18. Com $h > 0$, $f(r_N + h) - f(r_N) = \sum_{r_N \leq r_n < r_N + h} \frac{1}{n^2}$ e $f(r_N) - f(r_N - h) = \sum_{r_N - h \leq r_n < r_N} \frac{1}{n^2}$.

O teorema do valor intermediário

Vamos considerar agora um importante resultado que tem uma visualização geométrica muito evidente. Em linguagem corrente, ele afirma que o gráfico de uma função ao passar de um lado a outro do eixo dos x necessariamente tem de cortar esse eixo. Por um bom tempo, até o final do século XVIII, esse resultado foi aceito sem que ninguém pensasse em demonstrá-lo. Aliás, a tentativa de Bolzano em demonstrá-lo foi um dos principais marcos do início do rigor na Análise no começo do século XIX. Vamos apresentar esse teorema em sua versão mais geral, como enunciamos a seguir.

4.24. Teorema (do valor intermediário). *Seja f uma função contínua num intervalo $I = [a, b]$, com $f(a) \neq f(b)$. Então, dado qualquer número d compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$. Em outras palavras, $f(x)$ assume todos os valores compreendidos entre $f(a)$ e $f(b)$, com x variando em (a, b).*

Demonstração. Basta demonstrar o teorema no caso em que $d = 0$, pois o caso geral se reduz a este para a função $g(x) = f(x) - d$.

Faremos a demonstração pelo método de bisseção, como na demonstração do Teorema 2.24 (p. 66). Seja l o comprimento de $[a, b]$. Começamos dividindo esse intervalo ao meio, obtendo dois novos intervalos fechados, digamos, $[a, r]$ e $[r, b]$. Se $f(r) = 0$, o teorema estará demonstrado. Se $f(r) > 0$, escolhemos o intervalo $[a, r]$; e se $f(r) < 0$, escolhemos o intervalo $[r, b]$. Em qualquer desses dois casos, teremos um novo intervalo, que denotaremos $[a_1, b_1]$, de comprimento $l/2$, e tal que $f(a_1) < 0$ e $f(a_2) > 0$. Novamente dividimos este intervalo ao meio, com o que, ou encontramos uma raiz de $f(x) = 0$, ou teremos um novo intervalo $[a_2, b_2]$, com $f(a_2) < 0$ e $f(b_2) > 0$. Prosseguindo assim, sucessivamente, ou esse processo termina com o encontro de uma raiz de $f(x) = 0$, ou obtemos uma família (I_n) de intervalos encaixados, $I_n = [a_n, b_n]$, o comprimento de I_n sendo

$l/2^n$. Portanto, pelo teorema dos intervalos encaixados (p. 65), a interseção desses intervalos contém um único ponto c.

Observe que c é interior a I, isto é, é diferente dos extremos de I. Vamos provar que $f(c) = 0$. Se fosse $f(c) > 0$, pela propriedade da permanência do sinal (p. 108), haveria uma vizinhança $V_\varepsilon(c)$, na qual f seria sempre positiva. Mas isto é impossível, pois basta fazer n suficientemente grande para que $I_n \subset V_\varepsilon(c)$ e $f(a_n) < 0$. Assim, concluímos que $f(c) = 0$. O raciocínio é inteiramente análogo no caso de supormos $f(c) < 0$.

Guiados pela intuição, podemos ser levados a pensar que toda função que goze da propriedade do valor intermediário seja contínua. No século XIX chegou-se mesmo a acreditar, erroneamente, nesse fato, como nos conta Lebesgue (1875–1941) na p. 96 de seu livro "Leçons sur l'intégration", publicado em 1903. (A Chelsea Publishing Co. publica a 3ª edição, de 1973.) Um contra-exemplo é dado pela função $f(x)$=sen$(1/x)$ se $x \neq 0$, e $f(0)$ igual a qualquer valor do intervalo $[-1, +1]$. Assim definida, f satisfaz a propriedade do valor intermediário em qualquer intervalo $[-a, a]$, mas não é contínua em $x = 0$. Neste exemplo a função só é descontínua num único ponto; entretanto, existem funções descontínuas em todos os pontos e que, não obstante, gozam da propriedade do valor intermediário em qualquer intervalo, como nos mostra Lebesgue.

4.25. Exemplo. O teorema do valor intermediário tem importantes aplicações, tanto de natureza teórica como prática. Por exemplo, ele permite provar que todo polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1}x + \ldots + a_1x + a_0$, de grau ímpar, tem pelo menos uma raiz real. Para isso lembramos o Exerc. 8 da p. 120, segundo o qual $p(x)$ muda de sinal com x passando de uma certa vizinhança de $-\infty$ a uma vizinhança de $+\infty$. Mais precisamente, existem vizinhanças V_- de $-\infty$ e V_+ de $+\infty$, tais que $p(x)$ é negativo em V_- e positivo em V_+. Em conseqüência, existem números $a \in V_-$, $b \in V_+$, $a < b$, tais que $p(a) < 0 < p(b)$. Daqui e do teorema do valor intermediário segue-se que existe c, $a < c < b$, tal que $p(c) = 0$. (É claro que pode haver mais de um número c nessas condições; o que podemos garantir, em geral, é a existência de pelo menos um.) Em contrapartida, um polinômio de grau par, como $p(x) = x^2 + 1$, pode nunca se anular.

O teorema seguinte é mais uma aplicação do teorema do valor intermediário.

4.26. Teorema. *Toda função f, contínua e injetiva num intervalo I, é crescente ou decrescente.*

Demonstração. Se f não fosse estritamente crescente ou decrescente, existiriam números x_1, x_2 e x_3 em I tais que $x_1 < x_2 < x_3$ e $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$, ou $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Na hipótese de ser $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$, se $f(x_3) > f(x_1)$ (faça um gráfico para acompanhar o raciocínio), pelo teorema do valor intermediário, deveria existir um número x' entre x_1 e x_2 tal que

$f(x') = f(x_3)$, contradizendo a injetividade de f; e se fosse $f(x_3) < f(x_1)$, pelo mesmo teorema, deveria existir x' entre x_2 e x_3 tal que $f(x_1) = f(x')$, novamente contradizendo a injetividade de f. O raciocínio, no caso $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$, é análogo. Concluímos, então, que f é estritamente crescente ou decrescente, como queríamos provar.

O teorema que acabamos de demonstrar é muito interessante, pois nos diz que as funções crescentes e as decrescentes são as únicas funções contínuas definidas em intervalos que são invertíveis. Isso nos leva, naturalmente, a perguntar: será que são essas as únicas funções (definidas em intervalos) invertíveis? A resposta é negativa, como vemos pelo seguinte contra-exemplo: seja f assim definida no intervalo $I = [0, 1]$: $f(x) = x$ se x for racional e $f(x) = 1 - x$ se x for irracional. Faça o gráfico dessa função e verifique que ela é invertível, mas não é monótona em qualquer subintervalo de I; em conseqüência, não é contínua em seu domínio, apenas no ponto $x = 1/2$ (Exerc. 13 adiante).

O método de bisseção utilizado na demonstração do Teorema 4.24 é muito útil para implementar esquemas numéricos de computação. Com uma simples calculadora científica é possível calcular raízes polinomiais com boas aproximações. (Veja o Exerc. 2 adiante.)

Exercícios

1. Faça a demonstração do Teorema 2.24 no caso $f(a) > f(b)$.
2. Prove que a equação $x^4 + 10x^3 - 8 = 0$ tem pelo menos duas raízes reais. Use uma calculadora científica para determinar uma dessas raízes com aproximação de duas casas decimais.
3. Prove que um polinômio de grau ímpar tem um número ímpar de raízes (reais), contando as multiplicidades.
4. Prove que se n é par, $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ assume um valor mínimo m. Em conseqüência, prove que $p(x) = a$ tem pelo menos duas soluções distintas se $a > m$ e nenhuma se $a < m$.
5. Prove que se um polinômio de grau n tiver r raizes reais, contando as multiplicidades, então $n - r$ é par.
6. Prove que todo número $a > 0$ possui raizes quadradas, uma positiva e outra negativa.
7. Prove que todo número $a > 0$ possui uma raiz n-ésima positiva; e se n for par, possuirá também uma raiz n-ésima negativa.
8. Seja f uma função contínua num intervalo, onde ela é sempre diferente de zero. Prove que f é sempre positiva ou sempre negativa.
9. Sejam f e g funções contínuas num intervalo $[a, b]$, tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Prove que existe um número c entre a e b, tal que $f(c) = g(c)$. Faça um gráfico para entender bem o que se passa.
10. Seja f uma função contínua no intervalo $[0, 1]$, com valores nesse mesmo intervalo. Prove que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$. Interprete este resultado geometricamente.

11. Nas mesmas hipóteses do exercício anterior, prove que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 1 - c$. Interprete este resultado geometricamente.

12. Seja f uma função contínua no intervalo $[0, 1]$, com $f(0) = f(1)$. Prove que existe um número $c \in [0, 1/2]$ tal que $f(c) = f(c + 1/2)$. Este exercício tem uma interpretação física muito interessante: se f representa a temperatura num determinado instante, ao longo de qualquer curva fechada simples sobre a superfície terrestre — em particular o equador terrestre —, e x representa a distância ao longo dessa curva a partir de um c erto ponto, o resultado anunciado significa que existem dois pontos, c e $c + 1/2$, onde a temperatura tem o mesmo valor.

13. Prove que $f(x) = x$ se x for racional e $f(x) = 1 - x$ se x for irracional é contínua em $x = 1/2$ e somente nesse ponto.

14. Considere a função f assim definida: $f(x) = -x$ se x for racional e $f(x) = 1/x$ se x for irracional. Faça o gráfico dessa função e mostre que ela é uma bijeção descontínua em todos os pontos.

Sugestões

2. Lembre-se de que quando um polinômio com coeficientes reais tiver uma raiz complexa, ele terá também a complexa conjugada como raiz. Verifique que há uma raiz entre zero e 1 e determine esta raiz pelo método de bisseção.

6. Suponhamos $a \neq 1$, já que o caso $a = 1$ é trivial. Se $a > 1$, $f(x) = x^2$ é tal que $f(1) < f(a)$; logo, pelo teorema do valor intermediário, existe um número entre 1 e a, designado por $\sqrt{a}$, tal que $f(\sqrt{a}) = a$. Se $a < 1$, $f(1) > a > f(a)$, e novamente existe um número $\sqrt{a}$ entre a e 1 tal que $f(\sqrt{a}) = a$. E o caso de raiz negativa?

10. Considere a função $g(x) = f(x) - x$, se já não for $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$.

11. Use o Exerc. 9 com $g(x) = 1 - x$.

12. Considere a função $g(x) = f(x) - f(x + 1/2)$ no intervalo $[1, 1/2]$.

Notas históricas e complementares

O início do rigor na Análise Matemática

O desenvolvimento da teoria das funções que começamos a apresentar neste capítulo é obra do século XIX. E só foi possível depois de um longo período, de cerca de século e meio, de desenvolvimento dos métodos e técnicas do Cálculo, desde o início dessa disciplina no século XVII.

As idéias fundamentais do Cálculo, sobretudo o conceito de derivada, careciam, desde o início, de uma fundamentação lógica adequada. Os matemáticos sabiam disso e até foram muito criticados em seu trabalho. A mais contundente e bem fundamentada dessas críticas partiu do conhecido bispo e filósofo inglês George Berkeley (1685-1753), numa publicação de 1734. Houve também respostas a essas críticas, bem como, durante todo o século XVIII, tentativas de encontrar uma fundamentação adequada para o Cálculo, embora sem maiores conseqüências. A mais importante dessas tentativas foi a que empreendeu Lagrange, e que está associada às séries de funções.

Nessa época ainda não havia muita motivação para o trato de questões de fundamentos. Os matemáticos desse século tinham muito mais do que se ocupar em termos de explorar as idéias do Cálculo, desenvolver novas técnicas e usá-las na formulação e solução de problemas

aplicados, em Mecânica, Hidrodinâmica, Elasticidade, Acústica, Balística, Ótica, Transmissão do Calor e Mecânica Celeste. Em conseqüência disso, não havia uma separação nítida entre o Cálculo e suas aplicações, entre a Análise Matemática e a Física Matemática; e ficava diminuída, ao menos em parte, a importância do rigor na formulação dos métodos, pois muitas vezes os resultados empíricos já eram um teste do valor desses métodos. Assim, por exemplo, um problema físico que se traduzia numa equação diferencial, como o movimento de um pêndulo ou as vibrações de uma corda esticada, já tinha garantidas, por razões físicas, a existência e a unicidade da solução. Isso está exemplificado na produção científica dos mais importantes matemáticos do século, dentre os quais destacam-se Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Não obstante o pouco que se fez, durante todo o século XVIII, em termos de rigor na Análise Matemática, foi em meados desse século que surgiu um dos problemas que se tornou o mais fértil no desenvolvimento da Análise no século seguinte, e que consiste em expressar uma dada função em série infinita de senos e cossenos. Mais especificamente, dada uma função periódica f, de período 2π, determinar os coeficientes a_n e b_n de forma que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n, \operatorname{sen} nx). \tag{4.11}$$

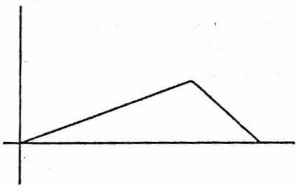
Esse problema surgiu primeiro em 1753, em situação particular, num trabalho de Daniel Bernoulli (1700-1782), em seu estudo da corda vibrante, em que se punha a questão de expressar a função que dava o perfil inicial da corda como série de senos. As vibrações de uma corda esticada foram estudadas pela primeira vez por Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) em 1747; e logo em seguida por Euler, depois por Bernoulli. Tratava-se de determinar uma função de duas variáveis satisfazendo uma equação diferencial parcial, a chamada *equação das ondas*. Euler achava que o perfil inicial da corda pudesse ser inteiramente arbitrário. d'Alembert achava que só podiam ser admitidas funções dadas por uma expressão analítica, como um polinômio ou mesmo uma série de potências; ou em termos das funções transcendentes familiares, como as funções trigonométricas, a exponencial ou o logaritmo. Isso porque ele entendia a derivação como operação que transformava as funções umas nas outras segundo um formalismo algébrico bem determinado: x^n em nx^{n-1}, $\operatorname{sen} x$ em $\cos x$, etc. Como derivar $f(x)$ se ela fosse dada por uma lei qualquer?

O modo como Bernoulli ataca o problema difere bastante dos pontos de vista adotados por d'Alembert e Euler. O importante a notar aqui é que essas investigações acabaram envolvendo seus autores numa controvérsia inconclusiva. Cada um manteve sua própria opinião, nada puderam decidir, justamente porque lhes faltavam idéias precisas dos conceitos de função e derivada. (Analisamos esse episódio em artigo na *Revista Matemática Universitária*, Nº 1, Junho de 1985.)

Vimos, no início do capítulo, como o conceito de função foi evoluindo gradualmente. Também o conceito de continuidade teve uma evolução gradual. De começo significava a permanência da mesma expressão analítica que definia a função, ao passo que "descontinuidade" significava, não a "ruptura" do gráfico da função, mas da expressão analítica ou lei que definisse a correspondência entre a variável dependente e a variável independente (ou variáveis independentes). Como a derivada era concebida como uma *operador algébrico*, as funções admitidas numa equação diferencial, como a da corda vibrante, só poderiam ser aquelas dotadas de "expressões analíticas", como insistia d'Alembert. Isso excluía a possibilidade de um perfil mais geral, do tipo ilustrado na Fig. 4.3, como pretendia Euler, adotando assim um conceito de função que ia além da simples idéia de uma variável dada em termos de outra (ou outras) mediante uma fórmula ou expressão analítica. E ambos, d'Alembert e Euler, não concordavam com a possibilidade sugerida por Bernoulli de que uma função arbitrária pudesse admitir um desenvolvimento do tipo (4.11), em termos de funções periódicas tão particulares como os ter-

mos da série. A questão posta por Bernoulli permaneceu dormente por cerca de meio século até que fosse retomada pelo eminente físico-matemático Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) em seus estudos sobre a propagação do calor. Nesses estudos surge várias vezes a necessidade de desenvolvimentos do tipo (4.11). E a possibilidade desse desenvolvimento, em toda a sua generalidade, apresenta-se, no início do século XIX, como um problema central da Análise Matemática.

Fig. 4.3



A forma mais completa dos trabalhos de Fourier sobre propagação do calor encontra-se em seu livro *Théorie Analytique de la Chaleur*, publicado em 1822 (traduzido em inglês pela Editora Dover). Fourier acreditava que funções "arbitrárias" pudessem ser desenvolvidas em séries do tipo (4.11); e pensou haver demonstrado esse resultado. Eis um exemplo concreto, já apresentado no início do capítulo:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx, \tag{4.12}$$

onde a função f, soma da série, resulta ser

$$f(x) = \frac{x}{2} \quad \text{se} \quad -\pi < x < \pi; \quad f(-\pi) = f(\pi) = 0; \tag{4.13}$$

e f é definida em toda a reta como função periódica de período 2π. Esse é um exemplo que contrasta com os pontos de vista tanto de Euler como de d'Alembert, pois vista em sua representação (4.12) ela seria, para ambos, *analítica*; ao passo que, para eles, (4.13) seria outra função, obtida pela junção das translações de $f(x) = x/2$ com domínio $(-\pi, \pi)$!

Exemplos como esse deixavam clara a insuficiência dos antigos conceitos de função e continuidade de meados do século XVIII para lidar com os problemas trazidos ao cenário matemático pelos estudos de Fourier. O próprio Fourier já tem uma idéia bem mais ampla desse conceito. Eis como ele o descreve no Art. 417 da p. 430 de seu livro:

Em geral a função $f(x)$ representa uma sucessão de valores ou ordenadas arbitrárias. (...) Não supomos essas ordenadas sujeitas a uma lei comum; elas sucedem umas às outras de qualquer maneira, e cada uma é dada como se fosse uma grandeza única.

Isso equivale praticamente à definição que adotamos hoje em dia, segundo a qual *uma função f é uma correspondência que atribui, segundo uma lei qualquer, um valor y a cada valor x da variável independente.*

Situações novas como as apresentadas por Fourier evidenciavam a necessidade de uma adequada fundamentação dos métodos usados no trato dos problemas. Era preciso agora aclarar de vez o significado de "derivar" ou "integrar" uma função, fosse ela dada por uma "fórmula" ou não. "Derivar" não podia significar apenas aplicar uma "lei algébrica" a uma "fórmula", assim como "integrar" não podia mais ser apenas "achar uma primitiva". Essas maneiras de encarar as operações do Cálculo eram, a partir de então, insuficientes.

Como já dissemos, no final do capítulo anterior, Cauchy foi o protagonista principal do novo programa de tornar rigorosos os métodos da Análise. Ele certamente estava a par do

trabalho de Fourier e dos novos problemas que tinham de ser atacados. No prefácio de seu *Cours d'Analyse* Cauchy enuncia claramente seus altos padrões de rigor:

Quanto aos métodos, procurei dar-lhes todo o rigor que se exige em Geometria, de maneira a jamais recorrer a razões tiradas da generalidade da álgebra. Tais razões, embora muito freqüentemente admitidas, sobretudo na passagem das séries convergentes às séries divergentes e de grandezas reais a expressões imaginárias, a meu ver só podem ser consideradas como induções próprias a sugerir a verdade, mas que pouco têm a ver com a tão festejada exatidão as ciências matemáticas. Deve-se mesmo observar que elas tendem a atribuir às fórmulas algébricas validade universal, quando a maior parte dessas fórmulas só valem sob certas condições e para certos valores das grandezas envolvidas. Determinando essas condições e esses valores, e fixando de maneira precisa o sentido da notação de que me sirvo, faço desaparecer toda incerteza.

O ponto de partida de Cauchy em sua fundamentação da Análise foi a definição de *continuidade: "...a função f(x) será contínua em x num intervalo* (estamos usando a palavra "intervalo" para simplificar o enunciado de Cauchy) *de valores dessa variável se, para cada valor de x nesse intervalo, o valor numérico da diferença* $f(x+\alpha) - f(x)$ *decresce indefinidamente com* α. *Em outras palavras,* $f(x)$ *é contínua se um acréscimo infinitamente pequeno de x produz um acréscimo infinitamente pequeno de* $f(x)$*."*

Essa definição está muito próxima da que usamos hoje em dia, em termos de ε e δ. Aliás, essa simbologia também é devida a Cauchy, que a usa em várias demonstrações, embora ela só se universalize a partir da década de sessenta, com as preleções de Weierstrass em Berlim.

Devemos mencionar ainda o trabalho de Bolzano, já citado no Capítulo 2 (p. 74). Publicado em 1817, ele traz praticamente a mesma definição de continuidade de Cauchy, num enunciado até mais próximo de nossa definição atual. Ei-la: *"uma função* $f(x)$ *varia segundo a lei da continuidade para todos os valores de x situados num intervalo* (novamente usamos a palavra "intervalo" para simplificar) *se a diferença* $f(x+\omega) - f(x)$ *pode tornar-se menor que qualquer valor dado, se se pode sempre tomar* ω *tão pequeno quanto se queira."*

O objetivo de Bolzano era provar o teorema do valor intermediário. De momento cabe ressaltar o mérito desse seu trabalho, onde ele revela as mesmas preocupações com o rigor que vimos em Cauchy, e que estavam na ordem do dia. Aliás, na introdução ele menciona que no ano anterior (1816) Gauss publicara duas demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra, quando sua demonstração do mesmo teorema, dada em 1799, continha uma falha de rigor, como ele mesmo (Gauss) reconhecia, por fundamentar uma verdade puramente analítica num fato geométrico, falha essa que está ausente nas duas novas demonstrações mencionadas.

Devemos observar que Cauchy, não obstante seus inegáveis méritos e influência que teve no desenvolvimento da Análise Matemática, nisso foi muito beneficiado pelas posições que ocupava, pela prolixidade com que publicava e, particularmente, por trabalhar no mais importante centro europeu da época, que era Paris. Outros matemáticos seus contemporâneos havia, de maior visão que ele, e Gauss certamente era um desses, indubitavelmente o maior matemático do século. Mas tinha um estilo todo diferente, antes recolhido em si, publicava pouco ("pauca sed matura"); e Göttingen, o centro a que pertencia, ainda não rivalizava com Paris.

O teorema do valor intermediário

Já tivemos oportunidade de mencionar que o objetivo principal de Bolzano, com seu trabalho de 1817, foi demonstrar o teorema do valor intermediário por meios puramente analíticos.

Cauchy, após enunciar o teorema do valor intermediário no texto de seu *Cours d'Analyse* oferece, como "demonstração", o que não passa de uma simples 'justificativa", baseada na "visualização geométrica". De fato, supondo que b seja um valor compreendido entre $f(x_0)$ e $f(X)$, para mostrar que existe x entre x_0 e X tal que $f(x) = b$, ele simplesmente argumenta que

"*a curva que tem por equação* $y = f(x)$ *deve encontrar uma ou várias vezes a reta que tem por equação* $y = b$ *no intervalo compreendido entre as ordenadas que correspondem às abscissas* x_0 e X", apelando simplesmente para o fato de que o gráfico de f é uma curva contínua... Todavia, uma verdadeira "demonstração analítica" é dada na "Nota III" no final de seu livro.

Como já observamos, o teorema do valor intermediário é evidente, quando interpretado geometricamente. E por isso mesmo era aceito e usado no século XVIII, sem questionamento. As duas argumentações de Cauchy, mencionadas acima — a "justificativa" e a "demonstração analítica" — refletem muito bem a utilização do teorema no cálculo aproximado de raizes de polinômios. E revelam também a familiaridade que Cauchy certamente possuía com os trabalhos desses matemáticos do século XVIII.

Weierstrass e os fundamentos da Análise

Karl Weierstrass (1815–1897) estudou direito por quatro anos na Universidade de Bonn, passando em seguida para a Matemática. Abandonou os estudos antes de se doutorar, tornando-se professor do ensino secundário (Gymnasium) em Braunsberg, de 1841 a 1854. Durante todo esse tempo, isolado do mundo científico, trabalhou intensamente e produziu importantes trabalhos de pesquisa que o tornaram conhecido de alguns dos mais eminentes matemáticos da época. Um desses trabalhos, publicado em 1854, tanto impressionou Richelot, professor em Königsberg, que este conseguiu persuadir sua Universidade a conferir a Weierstrass um título honorário de doutor. O próprio Richelot foi pessoalmente à pequena cidade de Braunsberg para a apresentação do título a Weierstrass, saudando-o como "o mestre de todos nós". Weierstrass deixou Braunsberg e passou por vários postos do ensino superior, terminando professor titular da Universidade de Berlim, de onde sua fama se espalhou por toda a Europa. Tornou- se um professor muito procurado, que mais transmitia suas idéias através dos cursos que ministrava do que por trabalhos publicados; e dessa maneira exerceu grande influência sobre dezenas de matemáticos que freqüentavam suas preleções.

A partir de 1856 Weierstrass ministrou diversos cursos sobre teoria das funções, às vezes o mesmo curso repetidas vezes, e vários de seus alunos, que mais tarde se tornariam matemáticos famosos, fizeram notas desses cursos, como A. Hurwitz, M. Pasch e H. A. Schwarz. E muitas das idéias e resultados obtidos por Weierstrass estão contidos nessas notas ou simplesmente foram divulgados por esses seus alunos, por cartas ou em seus próprios trabalhos científicos. Nas Notas dos cursos de Weierstrass aparecem as primeiras noções topológicas, em particular a definição de "vizinhança" de um ponto, a definição de continuidade em termos de desigualdade envolvendo ε e δ, e vários resultados sobre funções contínuas em intervalos fechados. Em particular, o chamado "Teorema de Bolzano-Weierstrass" está entre esses resultados, o qual Weierstrass formulou originalmente para conjuntos infinitos e limitados, e não para seqüências, como vimos no Capítulo 2 (p. 66). O teorema diz que *todo conjunto numérico infinito e limitado possui ao menos um ponto de acumulação.* O leitor não terá dificuldades em provar o teorema nesta versão com os mesmos argumentos usados na demonstração da outra versão dada na p. 67. Weierstrass, através de seus cursos, exerceu decisiva influência na modernização da Análise.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Gauss nasceu em Brunswick, de pais pobres; e teve suas qualidades de gênio reconhecidas bem cedo. Graças à proteção do duque de Brunswick pôde estudar e cursar a Universidade de Göttingen, onde, a partir de 1807 e pelo resto de sua vida, seria Professor de Astronomia e Diretor do Observatório.

Ao lado de Arquimedes e Newton, Gauss é considerado um dos três maiores matemáticos de todos os tempos. Sua produção científica se espalha por todos os domínios da Matemática

e da Ciência Aplicada, como Astronomia, Geodésia, e mesmo Eletricidade e Magnetismo.

As preocupações de Gauss com os fundamentos da Análise, e com o rigor na Matemática de um modo geral, são anteriores às de Cauchy, e revelam mesmo uma sensibilidade mais apurada. Sua primeira demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, de 1799, não satisfez a si próprio, por apoiar-se na intuição geométrica, por isso mesmo ele daria várias outras demonstrações do mesmo teorema. E nessa mesma época, vinte anos antes de Cauchy, Gauss já define corretamente o limite superior de uma seqüência e demonstra que a série $\sum a_n \cos nx$ converge se a_n tende a zero. Em 1813 ele publica um alentado trabalho sobre a série hipergeométrica,

$$F(a,\, b,\, c;\, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} x^n,$$

onde o símbolo $(r)_n$ significa $r(r+1)(r+2)\ldots(r+n-1)$. Juntamente com Legendre, Abel e Jacobi, deixou marcantes contribuições à teoria das funções elípticas.

Por várias razões Gauss não teve em sua época tanta influência como Cauchy. Como já dissemos, só publicava trabalhos muito bem acabados, que nada deixassem por fazer; e encontrava-se afastado de Paris, que era a meca científica da época. A isso deve-se acrescentar que não tinha pendores para o ensino. Confessava mesmo que não gostava de ensinar, e teve poucos alunos.

Capítulo 5

SEQÜÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES

Introdução

Num primeiro curso de Cálculo, o estudante aprende a calcular certas integrais de funções dadas em termos de funções bem conhecidas. Exemplos:

$$\int_0^x (4t^3 - 2t + 1)dt = x^4 - x^2 + x; \quad \int_1^x \frac{dt}{t^2}dt = 1 - \frac{1}{x}; \quad \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x}.$$

Mas são muito poucas as funções que podem ser efetivamente integradas. As integrais da grande maioria das funções ficam apenas indicadas, visto não poderem ser efetuadas em termos de funções conhecidas. Exemplos:

$$\int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t^3+1}dt; \quad \int_{-1}^x \frac{e^t}{t^2+3e^t+5}dt; \quad \int_1^x \frac{\sqrt{t}}{t^5+t+1}dt.$$

Cada uma destas integrais define uma nova função. A função chamada *logaritmo natural*, por exemplo, costuma ser definida assim:

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt \quad \text{para todo } x > 0.$$

Uma outra função, de importância fundamental em estudos de Probabilidade e Estatística, chamada *distribuição normal*, é definida por uma integral, assim:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2}dt$$

O fato de todas essas integrais não poderem ser calculadas em termos de funções "elementares" bem conhecidas não traz maiores inconvenientes, pois tais integrais têm sido exaustivamente estudadas, com valores numéricos calculados e tabelados, muito antes mesmo de contarmos com os poderosos recursos modernos dos computadores.

As séries de funções são um outro processo infinito muito importante para a definição e o estudo das propriedades de funções. Por exemplo, o leitor já viu,

em seu curso de Cálculo, que funções como $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, possuem as seguintes séries de MacLaurin:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Estas séries podem ser usadas como ponto de partida para a definição de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ de maneira puramente analítica, sem a necessidade de recorrer à motivação geométrica, como se costuma fazer em Trigonometria.

Seqüências de funções

Vamos iniciar este nosso estudo com as seqüências de funções f_n, todas com o mesmo domínio D. Assim, para cada valor de x em D, temos uma seqüência numérica $f_n(x)$, à qual se aplicam todos os conceitos e resultados do Capítulo 2, em particular o conceito de limite. Aqui, entretanto, esse limite, em geral, depende do valor x considerado — é *função* de x; daí designarmos o limite de uma seqüência de funções $f_n(x)$ por $f(x)$, justamente para evidenciar que esse limite é função de x.

Convergência simples e convergência uniforme

Quando lidamos com seqüências de funções, há que se distinguir dois tipos de convergência, um dos quais é o de *convergência simples* ou *convergência pontual*. Diz-se que uma seqüência de funções f_n, com o mesmo domínio D, converge *simplesmente* ou *pontualmente* para uma função f se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, para cada $x \in D$ existe N tal que

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Observe, entretanto, que o N que é determinado nessa definição pode não ser o mesmo para diferentes valores de x.

5.1. Exemplo. Um exemplo simples e bastante esclarecedor do conceito de convergência uniforme é o da seqüência $f_n(x) = x/n$, o domínio de x sendo toda a reta. É claro que $f_n(x) \to 0$, pois, dado qualquer $\varepsilon > 0$,

$$|x/n| < \varepsilon \Leftrightarrow n > N = \frac{|x|}{\varepsilon}.$$

Vemos assim que, para cada x fixado, encontramos um N; mas esse N varia com o variar de x; e quanto maior for $|x|$, tanto maior será o N, o qual tende

a infinito com $|x| \to \infty$. Em conseqüência disso, a convergência de x/n para zero não se dá de maneira "uniforme" para diferentes valores de x. A Fig. 5.1 ilustra muito bem o que se passa: o gráfico das funções $y = x/n$ são retas, que se tornam tanto mais próximas do eixo dos x quanto maior for o índice n. Mas, não importa quão grande seja esse índice, há sempre valores de x para os quais $|f_n(x)|$ supera qualquer número positivo, digamos, $|f_n(x)| > 1$. Dito de outra maneira, os gráficos não aproximam o eixo dos x de maneira "uniforme em x".

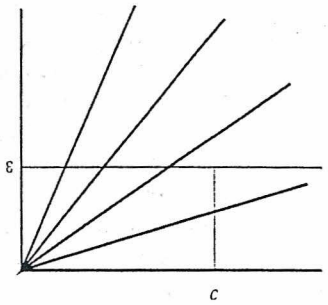


Fig. 5.1

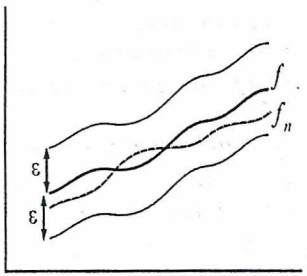


Fig. 5.2

Porém, como a própria figura sugere, restringindo o domínio das funções f_n a um intervalo do tipo $|x| \leq c$, onde c é qualquer número positivo, conseguimos determinar um índice N, válido para todos os valores x desse intervalo. Com efeito, neste caso, $|x/n| \leq c/n$, de forma que basta fazer $c/n < \varepsilon$ para termos também $|x/n| < \varepsilon$; ora, fazer $c/n < \varepsilon$ é o mesmo que fazer $n > c/\varepsilon$. Assim,

$$n > N = \frac{c}{\varepsilon} \Rightarrow |f_n(x)| = \frac{|x|}{n} < \varepsilon.$$

Dizemos então que a convergência é "uniforme em x", visto que conseguimos encontrar um N $(= c/\varepsilon)$ válido para todo $x \in [-c, c]$. É interessante observar também que, se aumentarmos o c, teremos de aumentar o N, embora a convergência continue uniforme em qualquer intervalo $|x| \leq c$. Mas observe: ela não é uniforme na união desses intervalos, que é todo o eixo real!

5.2. Definição. *Diz-se que uma seqüência de funções f_n converge uniformemente para uma função f num domínio D se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que, para todo $x \in D$,*

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

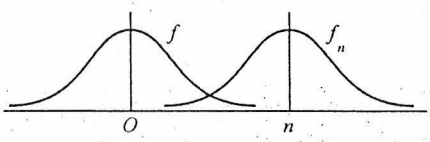
É costume referir-se à convergência de uma seqüência de funções f_n para uma função f, sem qualquer qualificativo; neste caso deve-se entender que se

trata de convergência simples ou pontual. É claro que este tipo de convergência é conseqüência da convergência uniforme, mas a convergência pontual não implica a convergência uniforme.

A convergência uniforme admite uma interpretação geométrica simples e sugestiva: ela significa que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe um índice N a partir do qual os gráficos de todas as funções f_n ficam na faixa delimitada pelos gráficos das funções $f(x) + \varepsilon$ e $f(x) - \varepsilon$ (Fig. 5.2). Ao contrário, a convergência não sendo uniforme, existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para uma infinidade de valores n, o gráfico de f acaba saindo da faixa $(-\varepsilon, \varepsilon)$, centrada no gráfico de f. É esse o caso da seqüência $f_n(x) = x/n$, que converge para $f(x) = 0$ (x real), mas não uniformemente. Então, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, o gráfico de qualquer f_n acaba saindo da faixa $(-\varepsilon, \varepsilon)$, centrada no eixo dos x, como se vê na Fig. 5.1.

Para negar a convergência uniforme, não é preciso que a desigualdade $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ seja violada *qualquer* que seja ε e para todo n, como aconteceu no exemplo anterior. Basta que essa violação ocorra para algum $\varepsilon > 0$ e para uma infinidade de índices n, como ilustra o exemplo a seguir.

Fig. 5.3



5.3. Exemplo. Consideremos a função $f(x) = e^{-x^2}$, cujo gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy e que tende a zero com $x \to \pm\infty$. Seja f_n a seqüência dada por $f_n(x) = f(x - n)$. Como se vê, o gráfico de f_n é o de f transladado n unidades para a direita (Fig. 5.3). É fácil ver, então, que $f_n(x) \to 0$ pontualmente. Mas essa convergência não é uniforme, pois $f_n(n) = 1$, de sorte que a condição $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ estará violada em $x = n$ com qualquer $\varepsilon < 1$. Entretanto, se nos restringirmos a qualquer semi-eixo $x \leq c$, teremos uniformidade da convergência, visto que, a partir de $n \geq c$, $f_n(x) \leq f_n(c) \leq \exp[-(c-n)^2]$; ora, esta última expressão pode ser feita menor do que qualquer $\varepsilon > 0$ a partir de um certo índice N, independentemente de x, desde que $x \leq c$.

5.4. Teorema (Critério de convergência de Cauchy). *Uma condição necessária e suficiente para que uma seqüência de funções f_n convirja uniformemente para uma função f num domínio D é que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, exista N tal que, qualquer que seja $x \in D$, se tenha:*

$$n > N \text{ e } m > N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{5.1}$$

Demonstração. Para provar que a condição é suficiente, observamos que (5.1) e o critério de Cauchy para seqüências numéricas garantem que, para cada x fixado, a seqüência numérica $f_n(x)$ converge para um certo número $f(x)$, de

sorte que $f_n(x) - f_m(x)$ tende a $f_n(x) - f(x)$ com $m \to \infty$; portanto, passando ao limite em (5.1) com $m \to \infty$, obtemos

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

qualquer que seja $x \in D$, e isso prova a convergência uniforme de f_n para f. (O fato de havermos perdido a desigualdade estrita não importa; se quiséssemos terminar com $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, bastaria começar com $\varepsilon/2$ em (5.1), o que nos levaria a $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.)

Deixamos ao leitor a tarefa de provar que a condição é necessária.

Exercícios

1. Prove que, qualquer que seja x, $\cos nx$ não tende a zero.
2. Mostre que $f_n(x) = 1/nx \to 0$ pontualmente em $x \neq 0$, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer domínio do tipo $|x| \geq c > 0$. Faça os gráficos das $f_n(x)$ para entender o que acontece.
3. Prove que $f_n(x) = 1/(1 + nx)$ tende a zero em $x \neq 0$, mas não uniformemente.
4. Mostre que as seqüências

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{\log n} \quad \text{e} \quad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx + \cos nx)}{x^2 + n + 1}$$

tendem a zero uniformemente em x, para todo x real.

5. Mostre que a seqüência $f_n(x) = x^n$ tende a zero pontualmente no intervalo $[0, 1)$, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer intervalo $[0, c]$, com $c < 1$. Faça o mesmo no caso dos intervalos $(-1, 1)$ e $[-c, c]$. Interprete sua análise geometricamente nos gráficos das funções f_n.
6. Faça os gráficos das funções da seqüência

$$f_n(x) = \begin{cases} (1-n)x + 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/n \\ 1/n^2 x & \text{se} \quad x \geq 1/n \end{cases}$$

Mostre que essa seqüência tende a zero pontualmente em $x > 0$, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer semi-eixo $x \geq c > 0$.

7. Prove que $f_n(x) = x^2/(1 + nx^2)$ tende a zero uniformemente em toda a reta.
8. Prove que a seqüência $f_n(x) = x/(1 + nx)$ tende a zero uniformemente em $x \geq 0$. Analise o comportamento dessa seqüência em $x < 0$.
9. Estude a seqüência $f_n(x) = nx/(1 + nx)$ quanto à convergência simples e uniforme.
10. Determine o limite da seqüência $f_n(x) = nx^2/(1+nx)$ e prove que a convergência é uniforme em $x \geq 0$. Analise a situação em $x < 0$.
11. Mostre que a seqüência $f_n(x) = e^{x/n}$ tende a 1 pontualmente para todo x real, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer intervalo $[-c, c]$.
12. Mostre que a seqüência $f_n(x) = nxe^{-nx}$, considerada em $x \geq 0$, tende a zero pontualmente, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer semi-eixo $x \geq c > 0$.

13. Faça o mesmo que no exercício anterior para a seqüência $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$.

14. Estude a seqüência $f_n(x) = x/(1+nx^2)$ quanto à convergência simples e uniforme em toda a reta.

15. Considere a seqüência $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ no intervalo $[0,\ 1]$. Faça o gráfico de f_n, determinando, inclusive, seu valor máximo e o ponto x_n onde ele é assumido. Mostre que $f_n(x)$ tende a zero pontualmente, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer intervalo $[0,\ c]$, $c < 1$.

16. Faça o gráfico de $f_n(x) = x^n/(1+x^n)$ para todo $x \geq 0$ e mostre que essa seqüência converge para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{se} \quad x = 1 \\ 1 & \textit{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer domínio do tipo $R_+ - V_\delta(1)$, com $\delta > 0$. (Aqui, como de costume, R_+ denota o conjunto dos números reais positivos.

17. Mostre que $f_n(x) = nx/(1+n^2x^2) \to 0$ qualquer que seja x real, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer domínio $|x| \geq c > 0$.

18. Prove que a seqüência

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2\log n}$$

tende a zero uniformemente, para todo x real.

Sugestões e soluções

1. Se $\cos nx \to 0$, o mesmo seria verdade de $\cos 2nx$. Como $\cos 2nx = \cos^2 nx - \operatorname{sen}^2 nx$, $\operatorname{sen} nx$ também tenderia a zero, o que é absurdo, pois $\operatorname{sen}^2 nx + \cos^2 nx = 1$.

2. Observe que $f_n(1/n) = 1/2$.

5. Observe que

$$x^n < \varepsilon \Leftrightarrow n\ \log x < \log\varepsilon \Leftrightarrow n > N = \frac{\log\varepsilon}{\log x}.$$

Vemos assim que para cada x fixado encontramos um N, mas esse N varia com o variar de x, tendendo a infinito com $x \to 1$ (estamos supondo $0 < \varepsilon < 1$); logo, a convergência é pontual, mas não uniforme. Com a restrição $0 < x \leq c < 1$,

$$\frac{\log\varepsilon}{\log x} \leq \frac{\log\varepsilon}{\log c},$$

de forma que basta tomar $N = \log\varepsilon/\log c$, para que tenhamos

$$n > N \Rightarrow x^n < \varepsilon.$$

7. Observe que $f_n(x) < 1/n$.

8. O caso $x \geq 0$ é análogo ao exercício anterior. No caso $x < 0$ não podemos permitir $x = -1/n$ em $f_n(x)$. Mas, qualquer que seja $c > 0$, com $n > 2/c$ e $x \leq -c$, teremos:

$$|1+nx| = n|x| - 1 > n|x| - n|x|/2 = n|x|/2 > nc/2,$$

donde segue a convergência uniforme.

9. A convergência é uniforme em qualquer domínio do tipo $|x| \geq c > 0$, como se vê analisando a diferença $1 - f_n(x)$. Observe que $f_n(1/n) = 1/2$, donde se vê que a convergência não pode ser uniforme em toda a reta.

10. $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x + 1/n} \to x$; $|f_n(x) - x| = |\dfrac{x}{1+nx}| < \dfrac{1}{n}$ se $x \geq 0$, o que prova que a convergência é uniforme nesse domínio. Se $x < 0$, como x não pode ser igual $a - 1/n$, pelo menos a partir de um certo n, podemos nos restringir a $x \leq c < 0$, onde, novamente, a convergência é uniforme, como o leitor deve provar.

14. f_n, que é função ímpar, assume valor máximo $1/2\sqrt{n}$ em $x_n = 1/\sqrt{n}$. Faça o gráfico de f_n para diferentes valores de n.

15. f_n assume seu valor máximo $1/4$ em $x_n = 1/\sqrt[n]{2}$, que tende a 1 crescentemente. Compare os gráficos das diferentes funções f_n para valores crescentes de n.

16. Calcule as derivadas primeira e segunda de $f_n(x)$; verifique que a derivada primeira é sempre positiva e a derivada segunda se anula em $x_n = [(n-1)/(n+1)]^{1/n}$, que tende a 1 crescentemente. Compare os gráficos das diferentes funções f_n, para valores crescentes de n.

17. Observe que $f_n(\pm 1/n) = \pm 1/2$. Se $|x| \geq c > 0$, $|f_n(x)| \leq 1/n|x| \leq 1/nc$.

18. Observe que f_n é funcão ímpar e ache seu valor máximo.

Conseqüências da convergência uniforme

A convergência uniforme, como se vê, é mais restritiva que a convergência simples, por isso mesmo tem várias conseqüências importantes, como veremos a seguir.

5.5. Teorema. *Se f_n é uma seqüência de funções contínuas num mesmo domínio D, que converge uniformemente para uma função f, então f é contínua em D.*

Demonstração. Sejam x, $x' \in D$. A desigualdade do triângulo permite escrever:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x')) + (f_n(x') - f(x'))| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x')| + |f_n(x') - f(x')| \end{aligned}$$

Dado qualquer $\varepsilon > 0$, a convergência uniforme permite determinar N tal que, para $n > N$, o primeiro e o último termo desta última expressão sejam cada um menor do que $\varepsilon/3$, quaisquer que sejam x, $x' \in D$. Feito isso, fixamos o índice n e usamos a continuidade de f_n para determinar $\delta > 0$ tal que x, $x' \in D$, $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon/3$. Assim, obtemos

$$x,\ x' \in D,\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon,$$

e isso completa a demonstração.

De acordo com o teorema que acabamos de demonstrar, se o limite de uma seqüência de funções contínuas num domínio D não é uma função contínua

nesse domínio, então a convergência certamente não é uniforme. É esse o caso da seqüência $x^n/(1+x^n)$ que, como vimos no Exerc. 16 atrás, converge para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1/2 & \text{se } x = 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

que é descontínua; logo, a convergência não pode ser uniforme em qualquer intervalo que inclua o ponto $x = 1$. Do mesmo modo, a seqüência x^n não converge uniformemente no intervalo $[0, 1]$, pois a função limite é 1 em $x = 1$ e zero em $x < 1$.

Deve-se notar também que uma seqüência de funções contínuas pode convergir para uma função contínua, sem que a convergência seja uniforme, como nos Exercs. 3 e 4 atrás, dentre outros.

5.6. Teorema. *Nas mesmas hipóteses do teorema anterior, sendo D um intervalo $[a, b]$, temos:*

$$\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b [\lim f_n(x)]dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{5.2}$$

Demonstração. Da convergência uniforme segue-se que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que $n > N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$; logo, $n > N$ implica

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]dx \right|,$$

donde

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \varepsilon(b-a).$$

Isto prova o resultado desejado.

O teorema que acabamos de provar nos diz que podemos trocar a ordem das operações de integração e de tomar o limite com $n \to \infty$, desde que a convergência seja uniforme. Ele foi demonstrado no pressuposto de que as funções f_n fossem todas contínuas no intervalo $[a, b]$. Mas tal hipótese nem é necessária; basta, além da convergência uniforme, que as funções f_n sejam integráveis em $[a, b]$, mas não vemos tratar este caso aqui.

5.7. Teorema. *Seja f_n uma seqüência de funções com derivadas contínuas num intervalo $[a, b]$, tal que f_n' converge uniformemente para uma função g. Suponhamos ainda que num ponto $c \in [a, b]$ a seqüência numérica $f_n(c)$ converge. Então, f_n converge uniformemente para uma função f, que é derivável,*

com $f' = g$. Esta última relação também se escreve

$$\frac{d}{dx} \lim f_n(x) = \lim \frac{d}{dx} f_n(x). \tag{5.3}$$

Demonstração. O teorema fundamental do Cálculo permite escrever

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt; \tag{5.4}$$

e como a convergência $f_n' \to g$ é uniforme, podemos passar ao limite sob o sinal de integração, o que prova que $f_n(x)$ tem por limite uma função $f(x)$, dada por

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt. \tag{5.5}$$

Daqui segue que $f' = g$.

Falta apenas provar que $f_n \to f$ uniformemente. De (5.4) e (5.5),

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(c) - f(c)| + \left| \int_c^x [f_n'(t) - g(t)]dt \right|. \tag{5.6}$$

Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que, para todo $t \in [a, b]$,

$$n > N \Rightarrow |f_n(c) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |f_n'(t) - g(t)| < \varepsilon.$$

Daqui e de (5.6) obtemos: $n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon[1 + (b - a)]$. o que completa a demonstração.

O leitor deve notar que a hipótese de convergência uniforme, não da seqüência original f_n, mas da seqüência de derivadas f_n', foi decisiva na demonstração deste último teorema; e sem ela não podemos chegar à mesma conclusão. Por exemplo, a seqüência $f_n(x) = \operatorname{sen} nx/n$ converge uniformemente para zero, mas $f_n'(x) = \cos nx$ nem sequer converge, como vimos no Exerc. 1 atrás.

Séries de funções

Os conceitos de convergência simples e uniforme de seqüências transferem-se naturalmente para séries, interpretadas estas como seqüências de *reduzidas* ou *somas parciais*. Assim, a *convergência uniforme* de uma série de funções,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots,$$

significa a convergência uniforme da seqüência de somas parciais ou reduzidas de ordem n,

$$S_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x).$$

Portanto, diz-se que uma série de funções, $\sum f_n(x)$, converge uniformemente num domínio D para uma soma $f(x)$ se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que, qualquer que seja $x \in D$,

$$n > N \Rightarrow |f(x) - \sum_{j=1}^{n} f_j(x)| = |\sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x)| < \varepsilon.$$

Os Teoremas 5.5 a 5.6 e 5.7, aplicam-se às séries, resultando, como é fácil ver, nos teoremas seguintes, sem necessidade de novas demonstrações.

5.8. Teorema (Critério de Cauchy). *Uma condição necessária e suficiente para que uma série $\sum f_n(x)$, onde os termos f_n são funções com o mesmo domínio D, convirja uniformemente é que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, exista N tal que*

$$n > N \Rightarrow |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

qualquer que seja p inteiro positivo;

5.9. Teorema. *Uma série de funções contínuas, que converge uniformemente num intervalo, tem por soma uma função contínua; e pode ser integrada termo a termo.*

9.10. Teorema. *Se uma dada série de funções $\sum f_n(x)$ é tal que a série de derivadas $\sum f_n'(x)$ converge uniformemente num intervalo, e se a série original converge num ponto desse intervalo, então sua soma f é derivável nesse intervalo e a derivação de f pode ser feita derivando termo a termo a série dada.*

O teorema seguinte, conhecido como *teste M de Weierstrass*, é um critério muito útil para verificar se uma dada série de funções converge uniformemente.

5.11. Teorema (teste M de Weierstrass). *Seja f_n uma seqüência de funções com o mesmo domínio D, satisfazendo a condição $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in D$, onde $\sum M_n$ é uma série numérica convergente. Então a série $\sum f_n(x)$ converge absoluta e uniformemente em D.*

Demonstração. É claro que a série de funções converge para uma certa função $f(x)$, e converge absolutamente, devido à dominação $|f_n(x)| \leq M_n$ e do fato de ser convergente a série $\sum M_n$. A convergência desta série garante que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$n > N \Rightarrow \sum_{j=n+1}^{\infty} M_j < \varepsilon.$$

Então, para todo x em D,

$$n > N \Rightarrow |f(x) - \sum_{j=1}^{n} f_j(x)| = |\sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x)| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} M_j < \varepsilon,$$

o que prova a uniformidade da convergência e conclui a demonstração do teorema.

Outra demonstração pode ser feita com base no critério de Cauchy: dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que, para todo $x \in D$,

$$n > N \Rightarrow |f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq M_{n+1} + \ldots + M_{n+p} < \varepsilon.$$

Na aplicação do teste de Weierstrass, basta, evidentemente, que a série dada seja dominada pela série numérica a partir de um certo índice N, não necessariamente $N = 1$.

5.12. Exemplo. A série $\sum \dfrac{\operatorname{sen} nx}{(n+1)n!}$ converge uniformemente em toda a reta, pois é dominada pela série numérica convergente $\sum 1/n!$ Portanto, ela define uma função contínua f. Além disso, a série de derivadas também converge uniformemente, como é fácil ver, donde concluímos que f é derivável e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n+1)(n-1)!}.$$

Como se vê, temos aqui um exemplo de função definida por uma série. Muitas funções importantes nas aplicações são assim definidas, por meio de séries de funções. Isso acontece tipicamente na solução de equações diferenciais por meio de séries.

Exercícios

1. Prove que a seqüência $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ não converge uniformemente em $[0, 1]$, verificando que
$$\lim \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 [\lim f_n(x)]dx.$$

Nos Exercs. 2 a 5, prove que a série dada converge absoluta e uniformemente no domínio indicado.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ em $\mathbf{R}$; 3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2 + \cos nx}$ em $\mathbf{R}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n^3(2 - \cos x)}}$ em $\mathbf{R}$; 5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-nx}$ em $x \geq 0$.

6. Prove que a série $\sum x^n/(1+x^n)$ converge absoluta e uniformemente em qualquer intervalo $|x| \leq c < 1$, mas não em $(-1, 1)$. Prove que ela define uma função contínua em todo o intervalo $(-1, 1)$.

7. Prove que a função $f(x) = \sum x^n/(1+x^n)$, definida no intervalo $(-1, 1)$, tende a ∞ com $x \to 1$ e a $-\infty$ com $x \to -1$.

8. Prove que $\sum 1/(1+n^2x)$ define uma função contínua em R, excetuados $x = 0$ e os pontos da forma $-1/n^2$, com n inteiro. Prove também que essa função é derivável, com derivada dada pela série obtida por derivação termo a termo da série original.

9. Faça o mesmo que no exercício anterior no caso da série $\sum 1/(n^2 - x^2)$, os pontos omitidos neste caso sendo os inteiros.

10. Estude a função definida pela série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \cos\frac{x}{n}\right)$$

quanto à continuidade e derivabilidade termo a termo.

11. Faça o mesmo que no exercício anterior no caso da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n} - \operatorname{sen}\frac{x}{n}\right).$$

12. Seja $\sum f_n(x)$ uma série de funções positivas, contínuas e não decrescentes num intervalo $[a, b]$, tal que $\sum f_n(b)$ converge. Prove que a série dada converge uniformemente e que sua soma é integrável, logo,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

13. Prove que $\sum e^{-nx}/n$ converge uniformemente em qualquer semi-eixo do tipo $x \geq c > 0$, logo, é uma função contínua em $x > 0$. Prove que essa função tende a infinito com $x \to 0$.

Sugestões e soluções

5. Aplique o teste M de Weierstrass, notando que $x^n e^{-nx} = e^{-n(x-\log x)} \leq e^{-n}$, pois $x - \log x$ atinge seu mínimo em $x = 1$.

6. Observe que $|x^n/(1+x^n)| \leq c^n/(1-c)$ e aplique o teste M de Weierstrass. Se a convergência fosse uniforme em $|x| < 1$, pelo critério de Cauchy, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existiria N tal que $n > N$ implicaria

$$\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| = |S_n - S_{n-1}| < \varepsilon$$

para todo $x \in (-1, 1)$. Ora, com n par, suficientemente grande, existe x nesse intervalo, muito próximo de 1 ou de -1 ($x = x_n = 1/\sqrt[n]{2}$), fazendo o primeiro membro da expressão acima igual a 1/3. Que a série define uma função contínua em $|x| < 1$ é evidente, pois qualquer elemento desse intervalo está em algum $[-c, c]$, com $c < 1$.

7. Fixado $x \in (0, 1)$, $f_n(x) = x^n/(1 + x^n)$ é uma seqüência numérica decrescente; logo, $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x^n/(1+x^n) > Nx^N/(1+x^N)$. Isso permite mostrar que existe uma vizinhança de $x = 1$, onde $S_N(x) > N/3$. Para provar que $\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$, considere $-S_{2N}(x)$, em $x = -y$, com $y \to 1$:

$$-S_{2N}(-y) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{y^{2n-1}}{1-y^{2n-1}} - \frac{y^{2n}}{1+y^{2n}}\right) > Ny^{4N-1}.$$

Isto pode ser feito maior do que $N/2$ com y numa vizinhança de 1.

8. Considere primeiro x positivo. Em qualquer semi-eixo $x \geq c > 0$,

$$\frac{1}{1+n^2x} < \frac{1/c}{n^2} \quad \text{e} \quad D\left(\frac{1}{1+n^2x}\right) = \frac{-n^2}{(1+n^2x)^2} > \frac{-1/c^2}{n^2} \ ,$$

donde se prova, com o teste M de Weierstras, a convergência uniforme da série original e da série de derivadas. Qualquer $x > 0$ está em algum semi-eixo $x \geq c > 0$, o que prova a continuidade da soma da série e sua derivabilidade termo a termo. Se $x \leq -c < 0$, tomamos n grande o suficiente para que $1 < n^2c/2$, donde

$$\left|\frac{1}{1+n^2x}\right| = \frac{1}{n^2|x|-1} \leq \frac{1}{n^2c-1} < \frac{2/c}{n^2} \ .$$

9. Considere x restrito a um intervalo $[a,\ b]$ que não contenha número inteiro e prove que aí a convergência é uniforme, tanto da série original como da série de derivadas.

10. Observe que

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} \to \frac{1}{2} \quad \text{com} \quad x \to 0.$$

Então, sendo $|x| \leq M$ e n suficientemente grande, a série dada é dominada pela série $\sum M^2/n^2$. A série de derivadas, $\sum (1/n)\operatorname{sen}(x/n)$ também converge absoluta e uniformemente no mesmo intervalo $|x| \leq M$, pois, a partir de um certo índice N, a correspondente série de módulos é dominada por $\sum 2M/n^2$.

11. Como no exercício anterior, estude $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

Séries de potências

Dentre as séries de funções desempenham papel especial as chamadas *séries de potências*, que são séries do tipo $\sum a_n(x-x_0)^n$, onde x_0 e os coeficientes a_n são constantes. Como se vê, elas são séries de potências de $x - x_0$. Dizemos que elas são *centradas* em x_0, *têm centro* em x_0, ou que são séries de potências *com referência* a x_0.

Sem nenhuma perda de generalidade, no estudo dessas séries podemos fazer $x_0 = 0$, considerando então séries do tipo $\sum a_n x^n$. Evidentemente, todos os resultados estabelecidos para estas séries podem ser facilmente traduzidos para aquelas com a substituição de x por $x - x_0$.

5.13. Lema. *Se a série de potências $\sum a_n x^n$ converge num certo valor $x = x_0 \neq 0$, ela converge absolutamente em todo ponto x do intervalo $|x| < |x_0|$; e se a série diverge em $x = x_0$, ela diverge em todo x fora desse intervalo, isto é, em $|x| > |x_0|$.*

Demonstração. Se a série converge em x_0, seu termo geral, $a_n x_0^n$, tende a zero; portanto, é limitado por uma constante M. Em conseqüência,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n|\,\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Isso mostra que a série $(1/M)\sum|a_nx^n|$ é dominada pela série geométrica de termo geral $|x/x_0|^n$, que é convergente se $|x| < |x_0|$; logo, $\sum|a_nx^n|$ converge no intervalo $|x| < |x_0|$.

Se a série $\sum a_nx^n$ diverge em $x = x_0$, ela não pode convergir quando $|x| > |x_0|$, senão, pelo que acabamos de provar, teria de convergir em $x = x_0$, o que completa a demonstração.

Uma série de potências $\sum a_nx^n$ pode convergir somente em $x = 0$, como é o caso da série $\sum n!x^n$; ou pode convergir em qualquer valor x, como se dá com a série $\sum x^n/n!$ Excluídos esses dois casos extremos, é fácil provar, como faremos no teorema seguinte, que existe um número positivo r tal que a série converge se $|x| < r$ e diverge se $|x| > r$.

5.14. Teorema. *A toda série de potências $\sum a_nx^n$, que converge em algum valor $x' \neq 0$ e diverge em algum outro valor x'', corresponde um número positivo r tal que a série converge absolutamente se $|x| < r$ e diverge se $|x| > r$.*

Demonstração. Seja r o supremo dos números $|x|$, x variando entre os valores onde a série converge. É claro que r é um número positivo, com $|x'| < r$; e $r < |x''|$ (pois, se $|x''| < r$, haveria x entre $|x''|$ e r, onde a série convergiria; e, pelo lema anterior, ela teria de convergir também em x'', o que é absurdo). Se x é tal que $|x| < r$, existe x_0 onde a série converge, com $|x| < |x_0| \leq r$. Então, pelo lema anterior, a série converge absolutamente em x. A série diverge em x com $|x| > r$, senão, pelo mesmo lema, teria de convergir em todo y com $|x| > |y| > r$ e r não seria o supremo anunciado.

Raio de convergência

O número r introduzido no teorema anterior é chamado o raio de convergência da série. Essa denominação se justifica porque o domínio natural de estudo das séries de potências é o plano complexo, e quando x varia no plano complexo, o conjunto $|x| < r$ é um círculo de centro na origem e raio r. Demonstra-se então que a série converge no interior do círculo e diverge em seu exterior. Todavia, em nosso estudo só vamos considerar x real; mas, mesmo assim, pelas razões expostas, chamaremos r de "raio de convergência".

O Teorema 5.14 garante a convergência absoluta no intervalo aberto $|x| < r$, nada afirmando sobre os extremos $-r$ e $+r$. É fácil dar exemplos ilustrativos de todas as possibilidades. Assim, as séries

$$\sum\frac{x^n}{n^2},\ \sum\frac{x^n}{n}\ \text{e}\ \sum x^n$$

têm todas o mesmo raio de convergência, $r = 1$, como se constata facilmente, verificando que elas convergem quando $|x| < 1$ e divergem quando $|x| > 1$. A

primeira converge em -1 e $+1$, a segunda converge em -1 e diverge em $+1$, e a terceira diverge nos dois extremos $x = \pm 1$.

A definição de "raio de convergência" como supremo dos números $|x|$, x variando entre os valores onde a série converge, se estende a todas as séries, podendo ser zero ou infinito, como é o caso das séries $\sum n!x^n$ e $\sum x^n/n!$ respectivamente. É fácil ver, nestes dois casos, que as afirmações do Teorema 5.14 permanecem válidas, com as devidas adaptações: se $r = 0$, a série diverge para todo $x \neq 0$; e se $r = \infty$, a série converge para todo x.

O raio de convergência pode ser facilmente calculado quando existe o limite de $|a_{n+1}/a_n|$. De fato, neste caso, pelo critério da razão, a série $\sum a_n x^n$ é absolutamente convergente se

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} x \right|$$

for menor do que 1; e divergente se esse limite for maior do que 1. Resulta daí que o raio de convergência da série considerada é

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

(mesmo que esse limite seja zero ou infinito), pois a série converge se $|x| < r$ e diverge se $|x| > r$.

Propriedades das séries de potências

5.15. Teorema. *Toda série de potências $\sum a_n x^n$, com raio de convergência $r > 0$ (r podendo ser infinito), converge uniformemente em todo intervalo $[-c, c]$, onde $0 < c < r$.*

Demonstração. Fixado $c < r$, seja x_0 um número compreendido entre c e r. Como a série converge absolutamente em x_0, existe M tal que $|a_n x_0^n|$ é limitado por uma constante M; logo, sendo $|x| \leq c$,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \, |\frac{x}{x_0}|^n \leq M |\frac{c}{x_0}|^n.$$

Isso mostra que a série $\sum |a_n x^n|$ é dominada pela série numérica convergente $\sum M|c/x_0|^n$. Então, pelo teste de Weierstrass, $\sum |a_n x^n|$ converge uniformemente em $|x| \leq c$, como queríamos provar.

Observe que o teorema anterior garante a convergência uniforme em qualquer intervalo $|x| \leq c$ contido no intervalo $|x| < r$, mas não neste último, que é a união daqueles. Como exemplo, considere a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

cujo raio de convergência é $r = 1$. Mas a convergência não é uniforme em todo o intervalo $|x| < 1$. Com efeito, pondo

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

temos:

$$\left| S_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}.$$

É claro que, dado $\varepsilon > 0$, não existe N tal que para $n > N$ esta última expressão seja menor que ε para todo x em $(-1, 1)$; basta pensar numa seqüência x_n tendendo a 1, com $|x_n|^{n+1}$ mantendo-se maior ou igual a um número c tal que $0 < c < 1$. Por exemplo, $x_n = c^{1/(n+1)}$.

5.16. Teorema da unicidade de séries de potências. *Se uma função f admite desenvolvimento em série de potências num ponto x_0, esse desenvolvimento é único.*

Demonstração. Suponhamos que f tenha dois desenvolvimentos numa vizinhança da origem, $|x| < r$:

$$f(x) = \sum a_n x^n = \sum b_n x^n.$$

Essas séries podem ser derivadas repetidamente, termo a termo, na referida vizinhança, em particular, em $x = 0$, donde segue que $a_n = b_n$ para todo n, o que prova o teorema.

Se uma função tem série de potências relativamente a um centro x_0, não importa que método empreguemos para obter essa série, já que ela é única pelo teorema que acabamos de demonstrar. Muitas séries são obtidas a partir de seus polinômios de Taylor, como no exemplo a seguir. Outro modo eficaz de obter séries de potências consiste em integrar séries já conhecidas; assim podem ser obtidas as séries em potências de x de $\log(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ e $\operatorname{arcsen} x$, considerados nos exercícios propostos adiante.

5.17. Exemplo. Os desenvolvimentos de várias funções em séries de potências são freqüentemente obtidos de seus desenvolvimentos de Taylor ou MacLaurin, bastando para isso verificar que o resto $R_n(x)$ tende a zero com $n \to \infty$. Por exemplo, sabemos do Cálculo que a função e^x tem desenvolvimento de MacLaurin dado por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

onde $R_n(x) = \dfrac{e^{c+1}x^{n+1}}{(n+1)!}$ e c é um número compreendido entre zero e x. Então,

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{x+1}|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Esta estimativa de $R_n(x)$ nos mostra que tal resto tende a zero com $n \to \infty$, qualquer que seja x, donde concluirmos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

desenvolvimento este que é válido para todo x real.

De modo inteiramente análogo obtemos os desenvolvimentos de seno e cosseno dados na p. 132.

Exercícios

Calcule o raio de convergência de cada uma das séries dadas nos Exercs. 1 a 6.

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n}$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{3})^{2n}(x+2)^n$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}\,x^n$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(3^n/n^3)x^n$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+1)^n}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}$.

7. A chamada *série hipergeométrica*, dada por $F(a, b, c; x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}x^n$, onde o símbolo $(r)_n$ significa $r(r+1)(r+2)\ldots(r+n-1)$, engloba várias funções importantes da Física Matemática. Supondo que nenhum dos números a, b, c seja um inteiro negativo, prove que o raio de convergência dessa série é 1.

Obtenha os desenvolvimentos dados nos Exercs. 15 a 21, indicando, em cada caso, o domínio de convergência da série.

8. $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

9. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

10. $\operatorname{senh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

11. $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

12. $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n}$.

13. Série binomial: $(1+x)^r = 1 + rx + \binom{r}{2}x^2 + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$.

14. $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$. Faça $x = 1$ e obtenha o seguinte resultado, conhecido como *série de Leibniz*: $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots$

22. $\operatorname{arcsen} x = x + \dfrac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \dfrac{1 \cdot 3}{2!2^2 \cdot 5} x^5 + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{n! 2^n (2n+1)} x^{2n+1}$.

Sugestões

4. $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{{}^{n+1}\sqrt{n+1}} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{1/n} \cdot \dfrac{\sqrt[n]{n+1}}{{}^{n+1}\sqrt{n+1}} \to \dfrac{1}{e}$.

5. $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^3 \to \dfrac{1}{3}$.

As funções trigonométricas

Nos Exercs. 8 e 9 atrás obtivemos as funções seno e cosseno em séries de potências de x. Observe que para se obter tais séries basta supor que existam duas funções $s(x)$ e $c(x)$, de classe C^1 em toda a reta, e tais que

$$s'(x) = c(x), \quad c'(x) = -s(x), \quad s(0) = 0, \quad c(0) = 1. \tag{5.7}$$

De fato, se existirem duas tais funções, é claro que elas serão de classe C^∞ em toda a reta; e que $s^2(x) + c^2(x) = 1$ (Exerc. 1 adiante), donde $|s(x)| \leq 1$ e $|c(x)| \leq 1$. Em conseqüência, essas funções têm desenvolvimentos de MacLaurin, com restos que tendem a zero com $n \to \infty$, qualquer que seja x. Fazendo $n \to \infty$ nesses desenvolvimentos, obtemos as séries já mencionadas e aqui repetidas:

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{e} \quad c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \tag{5.8}$$

É facil verificar que essas séries convergem qualquer que seja x, portanto, realmente definem funções de classe C^∞ em toda a reta, podem ser derivadas termo a termo e satisfazem as propriedades (5.7). Elas são agora usadas como nosso ponto de partida para definir as funções seno e cosseno.

É interessante notar que as funções dadas em (5.8) são o único par de funções satisfazendo (5.7) (Exerc. 2 adiante). Portanto, a partir de agora escreveremos $\operatorname{sen} x$ em lugar de $s(x)$ e $\cos x$ em lugar de $c(s)$.

Das fórmulas (5.8) segue imediatamente que $\cos x$ é uma função par e $\operatorname{sen} x$ é ímpar. Provam-se também as seguintes "fórmulas de adição de arcos":

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b, \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{aligned} \tag{5.9}$$

Todos as fórmulas e resultados da trigonometria seguem das identidades fundamentais obtidas acima.

Vamos provar que existe um número $c > 0$ tal que, à medida que x cresce de zero a c, $\operatorname{sen} x$ cresce de zero a 1 e $\cos x$ decresce de 1 a zero. Definiremos o número π como sendo igual a $2c$, donde $c = \pi/2$.

Começamos observando que $\cos x > 0$ em toda uma vizinhança da origem, pois é função contínua e positiva em $x = 0$; e como $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, vemos que $\operatorname{sen} x$ é crescente logo à direita da origem, portanto, positiva, já que $\operatorname{sen} 0 = 0$. E como $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, $\cos x$ é decrescente logo à direita da origem.

Vamos provar que $\cos x$ se anula em algum ponto à direita da origem. Supondo o contrário, pelo teorema do valor intermediário, $\cos x > 0$ para $x \geq 0$; portanto, $\operatorname{sen} x$ é estritamente crescente e $\cos x$ estritamente decrescente em $x > 0$. Fixado qualquer $a > 0$, teríamos:

$$0 < \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a < \cos^2 a;$$

e, por indução, $\cos 2^n a < (\cos a)^{2^n}$ para todo n inteiro positivo. Concluímos que $\cos 2^n a \to 0$, já que $\cos a < 1$. Em conseqüência, existe $b > 0$ tal que $\cos^2 b < 1/2$ e $\operatorname{sen}^2 b > 1/2$; logo,

$$\cos 2b = \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b < 0,$$

que contradiz a suposição inicial de que $\cos x$ não se anula em $x > 0$.

Existem, pois, raízes de $\cos x = 0$ em $x > 0$. Seja c o ínfimo dessas raizes. É claro que $c > 0$; e $\cos c = 0$ pela continuidade de $\cos x$. Como esta função é positiva em $0 \leq x < c$, $\operatorname{sen} x$ é crescente nesse intervalo, portanto, $\operatorname{sen} c = 1$. Pomos agora $\pi = 2c$. Em resumo, quando x varia de zero a $\pi/2$, $\operatorname{sen} x$ cresce de zero a 1 e $\cos x$ decresce de 1 a zero.

Uma vez definidas as funções seno e cosseno, as demais funções trigonométricas, bem como todas as inversas, são definidas e estudadas de maneira óbvia, como o leitor deve reconhecer sem dificuldades. Algumas dessas questões são propostas nos exercícios.

Exercícios

1. Prove que se $s(x)$ e $c(x)$ são duas funções de classe C^1 satisfazendo (5.9), então $s^2(x) + c^2(x) = 1$.
2. Prove que (5.8) é o único par de funções $s(x)$ e $c(x)$ de classe C^1 satisfazendo (5.7).
3. Prove as fórmulas (5.9).
4. Prove que $\operatorname{sen}\pi = 0$, $\cos\pi = -1$, $\operatorname{sen} 3\pi/2 = -1$, $\cos 3\pi/2 = 0$, $\operatorname{sen} 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$, $\operatorname{sen}(x - \pi/2) = \cos x$ e $\cos(x - \pi/2) = \operatorname{sen} x$.
5. Prove que $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são funções periódicas de período 2π. Prove também que 2π é o menor período positivo dessas funções. Faça os gráficos dessas funções.
6. Prove que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.
7. Mostre que a função $\operatorname{sen} x$, restrita ao intervalo $|x| < \pi/2$, é invertível; e que sua inversa tem derivada $(1 - x^2)^{-1/2}$. Repita o exercício restringindo a função $\operatorname{sen} x$ ao intervalo $[\pi/2,\ 3\pi/2]$; agora a derivada deverá ser $-(1 - x^2)^{-1/2}$.
8. Mostre que a função $\cos x$, restrita ao intervalo $0 < x < \pi$, é invertível; e que sua inversa tem derivada $-(1 - x^2)^{-1/2}$. Como no exercício anterior, repita a questão, começando com a função $\cos x$ restrita ao intervalo $[\pi,\ 2\pi]$.
9. Defina $\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x / \cos x$ e faça o gráfico dessa função. Prove que, restrita ao intervalo $|x| < \pi$, ela é invertível; e que sua inversa, $\operatorname{arctg} x$, tem derivada $(1 + x^2)^{-1}$. O número π pode ser calculado por integração numérica dessa derivada entre $x = 0$ e $x = +\infty$.

Sugestões

1. Derive $f(x) = s^2(x) + c^2(x)$ e note que $f(0) = 1$.
2. Suponha que existisse outro par de funções. S e C, nas mesmas condições de s e c, respectivamente. Mostre que $sC - Sc = a$ e $sS + cC = b$ são constantes; $a = 0$, $b = 1$. Tendo em conta que $s^2 + c^2 = 1$, obtenha $as + bc = C$ e $bs - ac = S$. Daqui segue, com $x = 0$, que $S(x) = s(x)$ e $C(x) = c(x)$.
3. Ponha
$$f(x) = \operatorname{sen}(x + b) - \operatorname{sen} x \cos b - \cos x \operatorname{sen} b,$$
$$g(x) = \cos(x + b) - \cos x \cos b + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} b;$$
e verifique que $f' = g$ e $g' = -f$, e que $f^2 + g^2 = 0$. Conclua, pela continuidade, que $f \equiv g \equiv 0$.
5. Se p e p' são períodos, também o são $-p$ e $p + p'$. Mostre que se p é um período entre zero e 2π, então existe um período menor do que π e outro menor do que $\pi/2$.

Notas históricas e complementares

As séries de potências

As séries de potências começaram a surgir logo no início do Cálculo, no século XVII. Assim, Newton obteve a série geométrica

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

por divisão direta do numerador 1 pelo denominador $1 - x$. E obteve a série do logaritmo,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{x} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n},$$

integrando termo a termo a série anterior. Isso aconteceu por volta de 1665, no contexto de calcular áreas sob a hipérbole, mas tais resultados só foram publicados posteriormente. Nicolaus Mercator (1620–1687), apoiando-se nos resultados de Gregorius Saint Vincent, obteve a mesma série do logaritmo em 1668, daí essa série ser às vezes chamada "série de Newton-Mercator".

Newton obteve muitas outras séries de potências por esse mesmo método de expandir certas funções simples e integrar termo a termo. Por exemplo, aplicando esse procedimento à série

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

obtemos a série de $\operatorname{arctg} x$:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Nesse domínio das séries, o mais importante dos resultados de Newton foi sua descoberta da série binomial (Exerc. 13 da p. 148).

A descoberta das séries de potências das funções elementares deu grande impulso ao desenvolvimento do Cálculo. Bastava agora saber derivar e integrar potências de x para ser possível derivar e integrar uma função qualquer. Foi até providencial que as séries de potências fossem descobertas antes que outros tipos de séries de funções, já que elas definem funções muito bem comportadas — as chamadas *funções analíticas*. Por causa disso elas podem ser derivadas e integradas termo a termo, operações essas que eram executadas desde o início do Cálculo, sem maiores preocupações com questões de convergência. Mas isso não é sempre possível com outras séries de funções, como as séries trigonométricas. É interessante notar também que o surgimento dessas outras séries nas aplicações, sobretudo as séries de Fourier no final do século XVIII, foi um fator decisivo no desenvolvimento da teoria da convergência.

Lagrange e as funções analíticas

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) nasceu em Torino, onde tornou-se professor de Matemática na Escola Real de Artilharia aos 19 anos. E aos 25 anos já era reconhecido como um dos maiores matemáticos do século. Em 1776 Lagrange aceitou o convite para substituir Euler em Berlim, já que este transferia-se de volta para São Petersburgo. Ele satisfazia assim o expresso desejo de Frederico II, segundo o qual "era preciso que o maior geômetra da Europa vivesse junto ao maior dos reis". Com a morte de Frederico em 1787, Lagrange transferiu-se para Paris, onde permaneceu pelo resto de sua vida.

Lagrange produziu uma série de trabalhos da maior importância, nos mais variados domínios da Matemática e da ciência aplicada. Sua obra mais famosa é a *Mécanique Analytique*, concebida em sua juventude, mas só publicada em 1788, e com a qual a Mecânica ficava definitivamente estabelecida como um ramo da Análise Matemática.

Em 1797 Lagrange publicou um livro intitulado *Théorie des fonctions analytiques*, no qual ele procura resolver o problema da fundamentação do Cálculo em bases puramente algébricas, sem a necessidade de considerar grandezas infinitesimais. Para isso ele serve-se da série de Taylor, num processo inverso: partindo da série de Taylor de uma dada função, ele introduz as sucessivas derivadas da função em termos dos coeficientes de sua série. Essa construção

se assentava na premissa de que toda função possui desenvolvimento em série de Taylor, mas isto é falso. Embora falho em seu intento principal, o livro de Lagrange traz importantes contribuições ao Cálculo, além de representar o esforço mais significativo do século XVIII para os fundamentos dessa disciplina, bem como o prenúncio do rigor definitivo que iria logo se desenvolver no século seguinte.

A convergência uniforme

As questões de convergência, derivabilidade e integrabilidade de séries de funções só puderam ser equacionadas e resolvidas depois que o trabalho de Fourier, devidamente apreciado, deixou bem evidentes as peculiaridades das séries trigonométricas.

Em seu *Cours d'Analyse* de 1821 Cauchy dá um tratamento bastante completo e satisfatório à convergência das séries. Mas não está totalmente livre das idéias antigas de infinitésimos e do hábito de conceber variáveis como abscissas de pontos móveis ao longo de eixos. Sua própria definição de continuidade revela esse aspecto dinâmico em seu modo de conceber limites. Por causa disso e por não perceber que a convergência das séries de funções tem aspectos que não estão presentes na convergência das séries numéricas, cometeu erros em afirmações que exigiam o conceito de "convergência uniforme" ou de "continuidade uniforme". Assim é que ele prova o (falso) teorema, segundo o qual "a soma de uma série de funções contínuas é uma função contínua". E também ao provar a integrabilidade de qualquer função contínua, a interveniência da continuidade uniforme passa despercebida a Cauchy.

Um outro matemático brilhante dessa época foi o norueguês Niels Henrik Abel (1802–1829). Ele era filho de um pastor pobre e teve um professor à altura de seu gênio, Bernt Holmboe. Quando Abel tinha 17 anos, Holmboe predisse que ele seria o maior matemático do mundo, e procurou encaminhá-lo adequadamente. Com uma bolsa de estudos, Abel viajou para Paris, onde encontrou os maiores matemáticos da época, inclusive Cauchy. Mas não foi devidamente reconhecido. Viajou para Berlim, onde teve o apoio de Crelle, mas também aí a sorte não esteve a seu lado. Logo ficou tuberculoso e morreu muito cedo. O destino, portanto, não permitiu que se cumprisse a previsão de Holmboe.

Num trabalho de 1826 sobre séries, particularmente sobre a série binomial, Abel usou a série trigonométrica $\sum(-1)^{n+1}\operatorname{sen} nx/n$ para mostrar a falsidade da afirmação de Cauchy. De fato, a soma dessa série é a função periódica de período 2π, que é igual a $x/2$ no intervalo $(-\pi, \pi)$. Como se vê, é uma função com saltos em todos os pontos da forma $(2k+1)\pi$. Sabemos que a condição que faltava a Cauchy para que seu teorema fosse verdadeiro é a da "convergência uniforme". Mas Abel também não a identificou; e em seu trabalho ele incorre nos mesmos erros que embaraçaram Cauchy: sua concepção dinâmica de continuidade é a mesma de Cauchy e o trato com infinitésimos também segue o mesmo estilo de Cauchy.

O primeiro matemático a identificar o conceito de convergência uniforme parece ter sido Christof Gudermann (1798–1852) num trabalho de 1838. E Weierstrass, que preparou sua tese (sobre funções elípticas) para a obtenção do diploma de "professor de 2º grau" com Gudermann, assimilou bem o novo conceito, dele tirando todas as implicações importantes na teoria das séries de funções. Em suas preleções em Berlim ele sempre enfatizou a importância da convergência uniforme, particularmente para a integração termo a termo de uma série convergente de funções contínuas.

A aritmetização da Análise

Logo no início do desenvolvimento racional da Matemática, há cêrca de 25 séculos, surgiu a crença, atribuída a Pitágoras, de que o número é a chave da explicação dos fenômenos. Mas não tardaria muito para que essa crença fosse seriamente abalada com a primeira grande crise de fundamentos da Matemática, de que já falamos no Capítulo 1. Essa crise foi contornada por

Eudoxo, ligado à escola de Platão, com sua "teoria das proporções", descrita no Livro V dos Elementos de Euclides. Isso deslocou o eixo dos fundamentos, da Aritmética para a Geometria. E Platão exprime muito bem essa nova convicção quando ensina que "Deus geometriza sempre" e manda escrever, no pórtico da Academia, "quem não for geômetra não entre". Desde então, e por muitos séculos a Matemática identifica-se com a Geometria, tanto assim que até uns cem anos atrás os matemáticos eram conhecidos como "geômetras".

Por isso mesmo, os matemáticos do século XVII, que tanto inovaram e deram origem à nova disciplina do Cálculo, foram, todavia, buscar inspiração em Euclides e Arquimedes, cujas obras eram então estudadas e admiradas como modelo mais acabado de rigor. E essa crença numa possibilidade de fundamentação geométrica do Cálculo perdurou até o início do século XIX. Os conceitos de derivada e integral, que tiveram origem nos conceitos de reta tangente e área, preservaram por muito tempo suas feições geométricas. Por uma curiosa coincidência, foi no momento mesmo em que a Geometria começou a revelar suas falhas de fundamentos, nas primeiras décadas do século, foi então que também tiveram início esforços bem-sucedidos para fundamentar o Cálculo fora da Geometria. Todos os conceitos básicos de função, limite, derivada, integral e convergência seriam agora definidos em termos dos números. Mas percebe-se então que os próprios números reais carecem de uma adequada fundamentação, a qual, entretanto, não tarda em ser encontrada. Até aquela definição de limite de Cauchy — correta, porém, ainda eivada da noção espúria de movimento — é agora substituída pela definição puramente numérica de Weierstrass: *$f(x)$ tem limite L com x tendendo a x_0 significa: dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Completava-se assim um movimento que veio a ser chamado de *Aritmetização da Análise* por Felix Klein. Agora a própria Geometria teria de buscar na Aritmética elementos mais seguros para sua fundamentação. Era, de certo modo, uma volta a Pitágoras.

Bibliografia recomendada

ASGER AABOE, *Episódios da História Antiga da Matemática*, tradução publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática. Livro excelente, escrito por um pesquisador competente, que vai direto às fontes. Tem a virtude de não ser muito extenso e de fazer uma seleção de tópicos os mais importantes e interessantes da Matemática da antigüidade.

R. P. BOAS, *A Primer of Real Functions*, publicado pela Mathematical Association of America, 3ª edição, 1979.

U. BOTTAZZINI, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Springer-Verlag, 1986.

BOURBAKI, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, 1974. Este livro reúne as Notas Históricas que aparecem na extensa obra do autor, intitulada *Éléments de Mathématique*. Uma das virtudes do livro consiste nas freqüentes referências a uma rica bibliografia de 345 títulos, diretamente ligados ao desenvolvimento da Matemática através dos séculos.

C. B. BOYER, *História da Matemática*, traduzido e publicado em português pela Editora Edgard Blücher, tanto a 1ª como a 2ª edição, esta em 1996. Um dos mais abalizados livros do gênero, escrito por eminente autoridade no assunto, principalmente no que diz respeito à fidelidade às fontes históricas originais.

C. B. BOYER, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover, 1959.

J. DIEUDONNÉ, *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Hermann. Págs. 46, 107, 121.

E. H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, 1979. Este é um excelente livro, que reúne várias qualidades ao mesmo tempo: não é muito longo, faz uma criteriosa seleção dos episódios que apresenta, é fiel aos fatos, usa a linguagem moderna para explicar e tornar inteligíveis os raciocínios antigos, sem contudo deformar esses raciocínios, o que não é fácil, mas torna a apresentação bastante didática.

H. EVES, *Introdução à História da Matemática*, Editora da Unicamp, 1995. Traduzido do inglês e com mais de 800 páginas, é um dos melhores e mais completos textos de História da Matemática atualmente em uso nos Estados Unidos. De leitura agradável e amena, é enriquecido com seções intituladas "panoramas culturais", que dão valiosos apanhados histórico-culturais dos vários períodos de desenvolvimento da Matemática.

J. V. GRABINER, *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, The MIT Press, 1981.

I. GRATTAN-GUINNESS, *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, The MIT Press, 1970.

I. GRATTAN-GUINNESS (Editor), *From the Calculus to Set Theory, 1630–1910 — An Introductory History*, Gerald Duckworth & Co., 1980.

L. H. JACY MONTEIRO, *Elementos de Álgebra*, Ao Livro Técnico, 1969. Embora seja um livro de Álgebra, contém um tratamento detallhado dos números reais.

M. KLINE, *The Evolution of Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972. Livro de mais de 1.200 páginas, muito bem estruturado, bem escrito e fiel aos fatos.

W. RUDIN, *Princípios de Análise Matemática*, Ao Livro Técnico, 1971.

M. SPIVAK, *Calculus*, Editorial Reverté, Barcelona. Original em inglês de 1967. Embora se trate de um livro de Cálculo, este livro é um "Honors Calculus" muito bem escrito e que inclui vários tópicos típicos de um curso de Análise. Altamente recomendável. O original, em inglês, é da Editora W. A. Benjamin, Inc.